TURING 图灵数学·统计学丛书



A Course in

Financial Calculus

金融数学教程

[英] Alison Etheridge 著

张寄洲等 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

金融数学教程

A Course in Financial Calculus

"一个从事金融业务而不懂数学的人，无非只能做些无关紧要的小事。"

——美国花旗银行副主席保尔·柯斯林

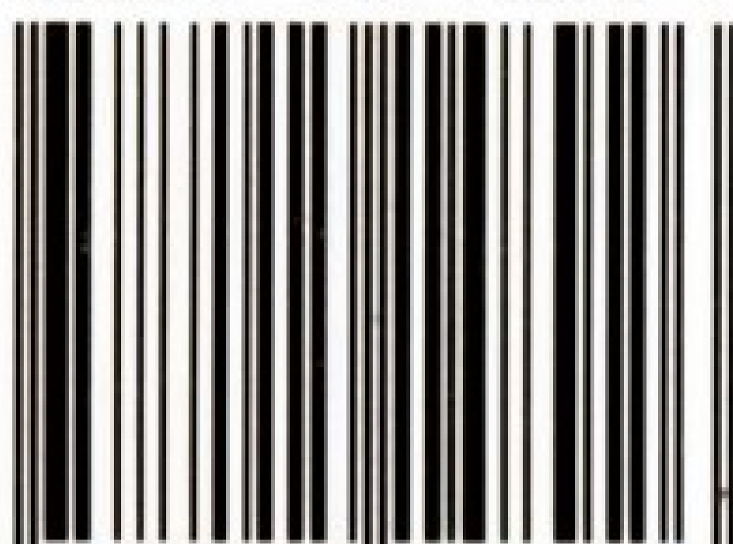
诺贝尔经济学奖已经至少3次授予以数学为工具分析金融问题的经济学家。金融数学这门新兴的交叉学科已经成为国际金融界的一枝奇葩。金融数学的发展曾经两次引发了"华尔街革命"。今天，金融数学家已经是华尔街最抢手的人才之一。目前国内金融行业最紧缺的就是掌握现代金融衍生工具的应用、能对金融风险做定量分析的、既懂金融又懂数学的高级复合型人才。

本书是牛津大学金融数学教材，含有大量的习题和例子，适合有一定基础的读者，并被斯坦福大学、芝加哥大学、加州大学圣迭戈分校等名校选用。书中介绍了一些基本概念，如二项式树、鞅、布朗运动、随机积分、Black-Scholes期权定价公式和一些复杂的金融模型及金融产品。

Alison Etheridge 牛津大学Madgalen学院教授。拥有牛津大学博士学位，并在剑桥大学做博士后研究。她曾先后任教于加州大学伯克利分校、爱丁堡大学和伦敦大学。主要研究兴趣是随机过程和偏微分方程及其应用。除本书外，她还著有*Introduction to Superprocesses*一书。

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

上架建议 数学/金融数学



ISBN7-115-14892-9/O1·2
定价：29.00元

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn

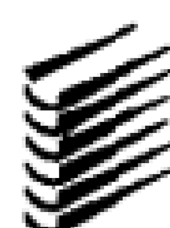
TURING 图灵数学·统计学丛书

A Course in Financial Calculus

金融数学教程

[英] Alison Etheridge 著

张寄洲等 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目（CIP）数据

金融数学教程 /（英）埃瑟里奇著；张寄洲译．—北京：人民邮电出版社，2006.8
（图灵数学 · 统计学丛书）

ISBN 7-115-14892-9

Ⅰ．金… Ⅱ．①埃… ②张… Ⅲ．金融—经济数学—教材 Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 065891 号

内容提要

本书是金融数学入门教材，含有大量的习题和例子，面向有一定数学基础的读者．书中首先基于离散时间框架描述了一些基本概念，如单时段模型、二项式树、离散参数鞅、布朗运动、随机分析和 Black-Scholes 模型及定价公式，接着介绍了一些复杂的金融模型和金融产品．最后讨论了金融方面更为高级的话题，如多资产股票模型、带跳的资产价格模型和随机波动率等．

本书适用于相关专业的本科生和研究生课程，也可供相关领域专业人士参考．

图灵数学 · 统计学丛书

金融数学教程

◆ 著 [英] Alison Etheridge
译 张寄洲 等
责任编辑 王丽萍

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700 × 1000 1/16
印张：12.75
字数：272 千字 2006 年 8 月第 1 版
印数：1– 4 000 册 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2006-1218 号

ISBN 7-115-14892-9/O1 • 2

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)88593802 印装质量热线：(010)67129223

版权声明

Original edition, entitled *A Course in Financial Calculus* by Alison Etheridge, ISBN 0-521-89077-2 published by Cambridge University Press in 2002.

This translation edition is published with the permission of the Syndicate of the Press of the University of Cambridge, Cambridge, England.

本书原版由剑桥大学出版社出版.

本书中文翻译版由剑桥大学出版社授权人民邮电出版社出版. 未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容.

译者简介

张寄洲 上海师范大学教授. 现任上海师范大学数理信息学院院长、上海市数学学会常务理事和《上海中学数学》主编.

1996 年在中国科学院数学研究所获理学博士学位，1996~1998 年在武汉大学做博士后研究. 2002 年 9~12 月在美国 New England 大学做高级访问学者，先后应邀访问过美国、加拿大、德国和日本的 10 多所大学. 主要研究领域为应用微分方程、金融数学、算子半群及其应用等. 已在国内外重要学术刊物上发表论文数 10 篇，出版教材 1 本.

译者序

金融数学是近 10 多年来蓬勃发展的新兴交叉学科，已经成为国际金融领域的一枝奇葩，受到国际金融界和应用数学界的高度重视. 金融数学的最显著特征就是有效地运用数学理论和方法发现和论证金融经济运行的一些规律. 金融数学的重要性可用美国花旗银行副主席保尔 · 柯斯林于 1995 年 3 月 6 日在英国剑桥大学牛顿数学科学研究所的讲演中所作的著名论断来解释，他说“一个从事银行业务而不懂数学的人，实际上只能做些无关紧要的小事. ”

金融数学的发展曾两次引发了“华尔街革命”. 20 世纪 50 年代末 60 年代初，Marlko-Witz 的证券投资组合理论与 Sharpe 的资本资产定价理论开创了金融数学理论研究的先河，从而引发了第一次“华尔街革命”. 他们两人因此获得了 1990 年诺贝尔经济学奖. 第二次“华尔街革命”是由 Black 和 Scholes 于 1973 年提出的衍生产品定价理论引起的，从而推动了期权交易业务的发展. 1997 年的诺贝尔经济学奖授予了 Scholes 和 Merton，就是为了奖励他们在期权定价理论方面的杰出贡献. 正是这两次“革命”，奠定了蓬勃发展的金融数学这门新学科的基础，同时也为研究新型衍生产品设计的新学科，即金融工程提供了理论基础.

众所周知，金融市场存在不确定性和多风险性. 长期以来，人们一直在探索利用多种因素正确评估风险资产和确定期权价格的有效方法. 金融数学模型的建立，对金融市场风险分析、预测和监控有着非常重要的作用. 特别是 Black-Scholes 模型的建立以套利方法为基础，为投资者提供了一种精确确定期权价格和控制投资风险的有效手段. 同时，也为如何化解风险提供了完整的思路.

由英国牛津大学 Alison Etheridge 教授撰写的《金融数学教程》一书，是高等院校金融数学课程的一本优秀教材，被国外很多大学广泛采用. 虽然阅读该书需要有一定的数学基础，但该书内容通俗易懂，与金融市场的实际相结合，配有大量的实际例子和习题. 能有机会将该书介绍给国内读者，我们感到非常高兴. 该书可作为国内数学系和商学院等有关院系的本科生和研究生的金融数学课程的教材，也可供金融界从业人员参考.

本书的翻译工作是由我和我的几名研究生以及同济大学博士生王杨合作完成的，其中前言、第 1、7 章以及索引由我自己翻译，第 2、6 章由郭培栋翻译，第 3 章由李松芹翻译，第 4 章由王杨翻译，第 5 章由朱海燕翻译. 最后由我负责全书统校，特别是在最后定稿阶段与郭培栋和朱海燕进行了有益的讨论. 此外，朱海燕做了大量的文字输入工作，李松芹对全书的 LaTeX排版工作做出了宝贵的贡献，在此表示感谢.

本书是应人民邮电出版社图灵公司之邀翻译的. 特别感谢责任编辑王丽萍女士，由于她的支持和鼓励使得本书的翻译工作能顺利完成. 同时非常感谢该书的作者 Alison Etheridge 教授，她特地为该书的中文版写了序言. 由于译者时间和水平所限，书中难免有疏漏之处，翻译不妥之处，敬请广大读者给予批评指正.

张寄洲

2006 年 3 月于上海师范大学

前 言

金融数学为学术研究与产业的成功结合提供了十分生动的范例. 在大学和银行业同时发展起来的高深数学方法已将衍生产品业务转化成数万亿美元的市场，从而导致了对训练有素的学生和相应的教科书的需求.

这本书可作为金融数学的入门课程. 很明显，本书受到了 Martin Baxter 和 Andrew Rennie《金融数学》一书的影响. 我非常感谢 Martin 和 Andrew 的指导并允许我采用他们书中的一些材料.

这本教材的结构在很大程度上与《金融数学》一书类似，但在数学内容上，特别是对随机分析的讨论，它已拓展成为一本适用于大学数学课程的教材，书中还提供了大量习题. 为了保持教材适当的篇幅，我们已经做了一些删减. 最显著的是没有讨论利率模型，而是把许多最流行的利率模型作为例子放在习题中. 作为补救措施，在第 7 章对利率模型必要的数学背景进行了深入的探讨，并且我们简短地讨论了在金融数学的后继课程中包含的一些主题. 习题应作为课程的一个组成部分，需要习题解答的教师可以写邮件给 solutions@cambridge.org 申请.

本书强调的是随机技术，但并不排除使用其他的方法. 与其他金融数学教材相同，我们也采用二项式树方法来引入套利定价的概念. 仿照《金融数学》一书，我们也给出关于鞅和随机分析在离散情形下的关键定义和结论，其中通过解析方法，重要的概念也变得清晰起来，从而为以后各章更多的结果作了铺垫. 通过 δ - 对冲原理和 Feynman-Kac 随机表示定理，我们建立套利定价与偏微分方程方法的联系. 无论我们采用什么方法，需要特别强调的一点是，由于在理论上依赖无套利的假设，因此对冲是非常重要的. 只有存在一个“复制投资组合”，我们的定价公式才有意义.

这本教材的早期版本是供 1997~1998 学年牛津大学数学系四年级本科生和一年级研究生使用的. 虽然我们假设读者多少熟悉一点概率论，但并不意味着这是事先必需的知识，而且我们所见的选修那些课程的学生，他们都能很快建立必备的概念. 关于这方面的适当背景知识，建议读者参看文献目录中列出的读物. 由于一门入门课程只涉及学科的一些浅显内容，因此我们也建议读者广泛阅读高级读物.

本项目得到 EPSRC 高级协会的资助. 在 Magdalen 学院完成本书写作令我十分愉快并且不胜荣幸. 非常感谢院长、同事、工作人员和学生们为我提供了这么优越的工作环境. 许多人提出了有益的建议并阅读了本书早期的手稿. 我特别要感谢 Ben Hambly, Alex Jackson 和 Saurav Sen. 也要感谢剑桥大学出版社的 David Tranah，他在本书的形成过程中起到了极其重要的作用，他的意见是非常宝贵的. 尤其应该提到的是，我应该对 Lionel Mason 的坚定支持和鼓励表示感谢.

Alison Etheridge

2001 年 6 月

中文版序

我万分高兴上海师范大学张寄洲教授已经将我的书《金融数学教程》翻译成中文. 我非常希望这本教材将会对金融市场的数学模型感兴趣的所有中国学生和教师提供有价值的资源. 虽然该书仅给出随机分析及它对金融衍生物定价的作用一个简短的介绍，但我希望即使是对这个优美而又非常重要的理论有一点粗略的了解，也足以激起读者继续学习这方面知识的兴趣.

Alison Etheridge
2006 年 3 月于牛津大学

I am deeply flattered that Professor Jizhou Zhang of Shanghai Normal University has translated my text "A Course in Financial Calculus" into Chinese. I very much hope that it will provide a valuable resource to all students and teachers in China with an interest in mathematical models of financial markets. It provides only a brief introduction to stochastic calculus and its application to the pricing of financial derivatives, but I hope that even a glimpse of this beautiful and powerful theory will be sufficient to inspire readers to go on and learn more.

Professor Alison Etheridge,
Magdalen College, University of Oxford
* E:alison.etheridge@magd.ox.ac.uk
* W:+44-1865-276098/281244 F:+44-1865-272595
* URL: http://www.stats.ox.ac.uk/~ etheridg

目 录

第 1 章　单时段模型

引　言

本章从金融和研究金融工具定价的问题入手，在简单模型的背景中，引入一些基本定义. 假设恰好在两个时间对市场进行观察：在零时刻金融合约生效；在 T 时刻合约到期. 我们进一步假设市场在 T 时刻只能处在有限个状态之一. 虽然模型很简单，但它揭示出现代金融核心的重要性: 即完全对冲的思想. 关于金融合约，如果能找到“公平的”价格，那么对“完全市场”的概念和它的重要性的初步讨论也是足够的.

尽管我们在后面会经常提到有关结果的论述，但还是可以放心地略过 1.5 节中的证明.

1.1　金融中的一些定义

金融市场工具可分为两种类型: 一类是*原生股票* (underlying stock)，即股份、债券、商品和外汇；另一类是它们的*衍生产品* (derivative)，即保证在未来给予某种支付或交付的权益，这种权益视原生股票的行为而定. 衍生产品通过参与者对未来的交易在现在时刻确定其价格，因而能减少或扩大风险. 有一种无需花费的合约，不但能消去股票和某些已确定未来价格的股票之间的差别，而且使双方都能承担属于股票自身固有的风险，并不需要资金马上去购买.

在同一市场，双方交易非常活跃的两种工具之间的联系是十分复杂和难以确定的. 原生股票所表现出的随机特性转移到本身也表现随机性的衍生产品上.

我们的主要目标是确定对衍生证券应该愿意支付多少钱. 但首先需要知道更多一点的金融术语.

衍生产品 1

定义1.1.1　*远期合约* (forward contract) *是在规定的未来日期 T 按规定的价格 K 买 (卖) 一种资产的协议. 买方被称为持有多头，卖方被称为持有空头.*

远期合约一般不在交易所里进行交易，签订远期合约不需要费用. 对远期合约来说,“定价问题”是确定应该写进合约里 K 的值是多少. 期货合约 (future contract) 与远期合约是相同的，只是期货合约是在交易所正规交易且具有标准化条款和特定的清算形式.

远期合约是衍生证券最简单的例子，相应的定价问题的数学方法也很简单. 围绕期权 (option) 定价问题有大量丰富的理论. 期权让持有人有权利但不负有义务做某件事情. 期权以许多不同的形式出现. Black 和 Scholes 由于定价欧式看涨期权而获得了声誉.

定义1.1.2 *欧式看涨期权让持有人有权利但不负有义务在规定时间 T 按规定价格 K 购买某种资产.*
欧式看跌期权让持有人有权利在规定时间 T 按规定的价格 K 出售某种资产.

一般而言，看涨 (call) 是指购买，看跌 (put) 是指出售. 术语欧式 (European) 是指持有人持有期权的价值到 T 时刻，即合约期满仅仅依赖于 T 时刻的市场状况. 存在其他期权，例如美式期权或亚式期权，其收益由原生资产在整个时间区间 $[0,T]$ 的表现来确定. 本章的方法仅对欧式期权的讨论有意义.

定义1.1.3 *衍生产品合约的到期时间 T 称为执行日或到期日，价格 K 称为敲定价格.*

定价问题

那么，什么是欧式看涨期权的定价问题？假设一家公司通常必须经营一种有内在风险的资产，比如石油. 例如，它们可能知道在 3 个月内将需要一千桶原油. 油价可能剧烈波动，但通过以敲定价格 K 购买欧式看涨期权，公司知道为了购买一千桶石油他们 (在 3 个月内) 最多将需要多少钱. 人们可以认为期权是作为保险用来规避油价上涨所带来的风险. 当前定价问题是对给定的 T 和 K，确定公司应该为这样的保险支付多少现金.

对这个例子，有一个额外的复杂情形：公司花钱贮存石油. 为了简化我们的工作，首先对基于资产的衍生产品进行定价，那些资产可以在不花费额外费用的情况下持有，通常是公司的股票. 同样地，我们假设对持有的股份没有额外的收益，即不支付红利.

2

假设条件: 除非另作其他说明，原生资产可以在没有额外费用和收益的情况下被持有.

在第 5 章将放宽这个假设条件.

假设公司要签一份合约，赋予它一种权利，但不负有义务，以价格 K 购买 3 个月到期的一单位的股票，公司将为这个合约支付多少钱?

收益

首先，我们需要知道在到期日，这个合约的价值是多少. 如果期权持有到期 (这里时间是 3 个月)，原生股票的实际价格是 S_T 且 $S_T > K$，那么期权将被执行. 此时，称期权处于实值 (in the money) 状态，即以价格 K 购

买价值为 S_T 的股票. 对公司来说期权的价值就是 (S_T-K). 另一方面，如果 $S_T<K$，那么从开放市场上直接购买原生股票将会更便宜，所以，期权将不被执行. (期权有不执行的自由权正是期权与期货的区别.) 因此期权失去价值且处于虚值 (out of the money) 状态.[如果 $S_T=K$，期权处于平值 (at the money) 状态.] 因此期权在 T 时刻的收益是

$$(S_T-K)_+\triangleq\max\{(S_T-K),0\}.$$

图 1-1 表明在到期日 3 类衍生证券的收益情况：远期购买期权，欧式看涨期权和欧式看跌期权，每一种都是到期日股票价格的函数. 在零时刻，衍生产品合约生效之前，我们允许自己是空头.

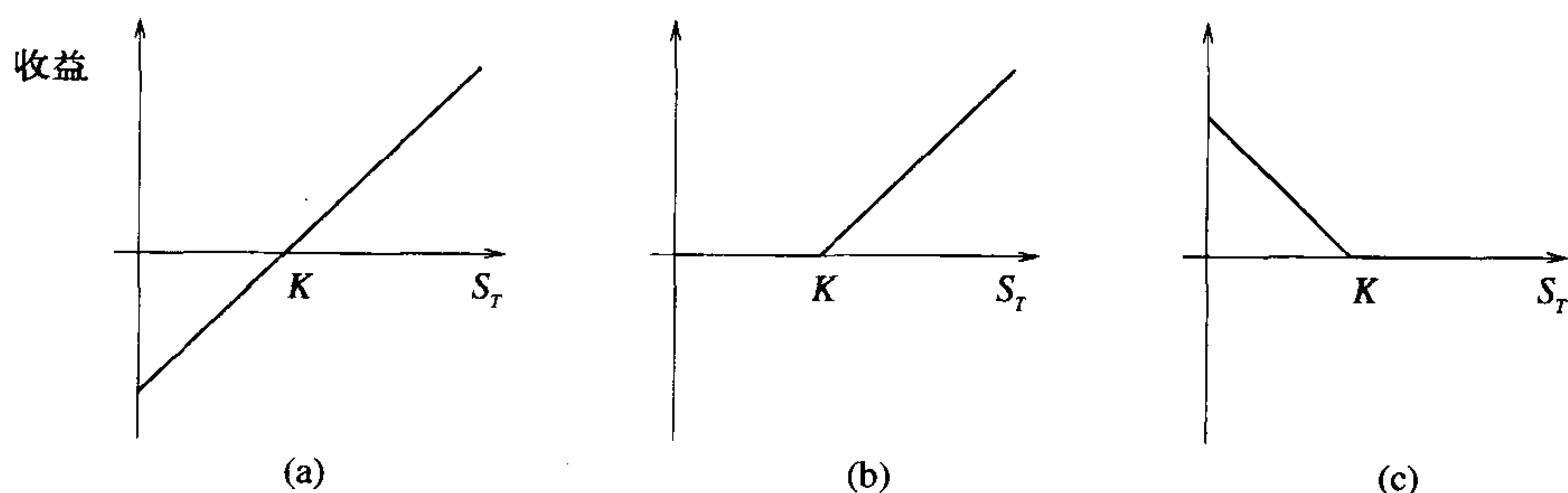


图 1-1: 敲定价格为 K 的 (a) 远期购买期权 (b) 欧式看涨期权 (c) 欧式看跌期权在到期日的收益是 S_T 的函数

组合

我们已经指出欧式看涨期权可以减少风险. 当然，投机者也可能会以股票上涨作为赌注利用它进行投机. 事实上，通过持有组合，即前面已经描述过的“标准”期权的组合，我们可以设计相当复杂的投资选择. 这里，我们给出一个例子，在习题 1 中，有更多的例子.

3

例1.1.4 [同价对敲 (straddle)] 假设投机者希望股票价格有一个大的变动，但他不知道变动的方向. 那么一个可能的组合就是同价对敲. 这涉及到同时持有具有相同敲定价格和到期日的欧式看涨期权和欧式看跌期权.

解释 同价对敲的收益是 $(S_T-K)_+$(来自看涨期权) 加上 $(K-S_T)_+$(来自看跌期权)，即 $|S_T-K|$. 虽然这种组合的收益总是正的，但在到期日，如果股票价格非常接近敲定价格，那么收益将不足以支付购买期权的费用，从而使投资者有损失. 另一方面，价格上较大的变动也可能会带来丰厚的利润. □

1.2 远期合约定价

为了求解定价问题，对市场的运作方式，我们必须作出一些假设. 为此，我们从详细讨论远期合约开始.

回想远期合约是以规定的未来日期和规定的价格购买 (或出售) 某种资产. 假设某人同意在 T 时刻以价格 K 购买某种资产. 那么在 T 时刻，其收益正好为 $S_T - K$，这里 S_T 是 T 时刻资产的实际价格. 收益可能是正的，也可能是负的，因为签订远期合约是不需要任何花费的，对远期合约来说，这也就是全部收益 (或损失). 现在的问题是如何确定 K 的公平价格.

期望值定价

签订合约的时候，我们并不知道 S_T，我们只能对它进行猜测，更正式地说，确定它的概率分布. 一个用途广泛的模型 (作为第 5 章中 Black-Scholes 分析的基础) 是股票价格服从对数正态分布 (lognormally distributed). 即存在常数 ν 和 σ，使得 S_T/S_0(T 时刻的股价除以零时刻的股价通常称为回报 (return)) 的对数(logarithm) 服从均值为 ν，方差为 σ^2 的正态分布. 用符号表示如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\frac{S_T}{S_0} \in [a,b]\right] &= \mathbb{P}\left[\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \in [\log a, \log b]\right] \\ &= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意股价是正的，从而 a 和 b 也是正的. 因此，上式右边的积分是有意义的.

我们的第一个猜想是 $\mathbb{E}[S_T]$ 应该表示写进合约中的公平价格. 然而，它与市场价格很难一致. 事实上，我们将表明利息是定价问题的关键.

无风险利率

4

我们需要一个货币的时间价值 (time value of money) 模型：现在的 1 美元可能比以后某个时刻的 1 美元更有价值. 假设对这些未来期望的市场 (债券市场) 的价格由某种利率决定. 特别地：

> **货币的时间价值**:假设对于小于某个时间 τ 的任何时刻 T 和某个常数 $r > 0$，在 T 时刻 1 美元的现值期望是 e^{-rT}. 于是利率 r 是这个时间段中的连续复利的 (continuously compounded) 利率.

这样的市场，比如说由美国政府债券衍生的市场，不带有违约风险，即对未来美元的承诺将总会兑现. 为了强调这一点，我们因此通常称 r 为无风险利率 (risk-free interest rate). 在这个模型中，通过购买或出售现金债券，投资者可以以同样的无风险利率贷款和借款给别人而获得利息.

在实际中利率市场不是这样简单，但这是我们在后面将要讨论的议题.

我们现在证明正是无风险利率，或等价地是现金债券的价格，而不是对数正态模型使得选取的敲定价格 K 出现在远期合约中. 套利定价

对不同的货币利率是不同的，因此为了确定起见，假设我们是在美元市场中操作，这里 (无风险) 利率是 r.

- 首先假设 $K > S_0 e^{rT}$. 出售者有义务在 T 时刻以 K 美元交付一单位股票，采用如下策略：在零时刻借入 S_0 美元 (即以价格 S_0 美元出售债券) 和购买一单位股票. 在 T 时刻，她应该支付 $S_0 e^{rT}$ 美元，但她有以 K 美元出售的股票，从而获得确定的利润 $(K - S_0 e^{rT})$ 美元.
- 如果 $K < S_0 e^{rT}$，那么购买者会采用相反的策略. 她在零时刻以 S_0 美元出售一单位股票和购买现金债券. 在 T 时刻，债券获得 $S_0 e^{rT}$ 美元，她以 K 美元买回一单位股票，从而获得确定的利润 $(S_0 e^{rT} - K)$ 美元.

除非 $K = S_0 e^{rT}$，否则总可以保证一方参与者获利.

定义1.2.1 *获得无风险利润的机会称为套利机会.*

在现代金融理论中建立模型的起点是规定不存在套利机会. (事实上，有人完全靠利用套利机会过日子，但是在市场价格波动将他们淘汰出局之前，这样的机会不会长时间存在. 在一段时间内，市场价格的波动可使这样的机会消失.) 我们已经证明下面的引理.

引理1.2.2 *假设市场无套利，S_0 为零时刻的股票价格，r 为无风险利率，那么到期日为 T 的远期合约敲定价格为 $K = S_0 e^{rT}$.*

有时称 $S_0 e^{rT}$ 为*套利价格* (arbitrage price)，也称为股票的*远期价格* (forward price). [5]

注释 在引理 1.2.2 的证明中，购买者出售可能不属于自己的股票，这被称为*卖空* (short selling). 之所以发生这种情况，是因为投资者可以“借”股票和钱. □

当然，远期合约是一种特殊类型的衍生产品. 虽然上述论述并没有告诉我们怎样确定期权的价值，但寻求一种不使参与双方获得无风险利润的价格的策略在下面是十分重要的.

重温前面的内容. 为了定价远期合约，构造包括一单位原生股票和 $-S_0$ 现金债券的投资组合，该组合在到期时刻 T 的价值恰好是远期合约自身的价值. 这样的投资组合称为*完全对冲* (perfect hedge) 或*复制投资组合* (replicating portfolio). 这种思想是现代金融数学中最重要的范例，并且在后面的论述中反复提到. 带有讽刺意义的是，我们将反复使用“期望”一词，但是把它作为完全对冲设计中的一种工具.

1.3 单时段两值模型

现在转过来确定欧式看涨期权的公平价格，为此，我们首先考虑一个描述市场价格波动的更简单模型．我们再次假定只在两个时刻观察市场，一个是合约生效日，另一个是合约的到期日．然而，现在我们假设股票价格在 T 时刻只有两种可能的值．我们看一个简单的例子．

欧式看涨期权定价

例1.3.1 假设某个股票的现价是 2500 日元．一个 6 个月到期的欧式看涨期权，其敲定价格是 3000 日元．投资者相信在 6 个月内股价为 4000 日元的概率是 1/2，为 2000 日元的概率是 1/2．因此，他计算出期权 (当它到期时) 的期望值是 500 日元．日元的无风险利率现值为 0．因此，投资者愿意为期权支付 500 日元，这是公平价格吗？

解 根据前节的内容，读者可能已经猜测到这个问题的答案是否定的．我们再次表明该合约的一方能获得无风险利润．在这种情况下，他是合约的出售者．下面是他可能采取的许多种可能的策略之一．

策略： 在零时刻，出售该期权，借入 2000 日元并购买一单位股票．

- 首先，假设在到期日，股票价格是 4000 日元，期权持有人执行合约．因此，他必须以 3000 日元出售股票．这时，他有 $(-2000+3000)$ 日元，即 1000 日元．
- 其次，如果在到期日股票价格是 2000 日元，那么期权持有人不执行合约．因此，他在公开的市场上以 2000 日元出售他的股票，这时他持有的净现金是 $(-2000+2000)$ 日元，即，他恰好不亏不赢．

6

以上两种方式，合约的出售者有获得利润的机会而没有损失的风险．这说明期权的价格太高．

那么期权合适的价格到底是多少呢？

我们从合约出售者的角度来考虑．记 S_T 为合约到期时的股票价格，出售者知道为了获得想要的权益，在 T 时刻他需要有 $(S_T-3000)_+$ 日元．想法是，为了保证这一点，在股票与现金的组合中，出售者要计算在零时刻他需要多少钱．

假设合约出售者用出售期权获得的现金购买一个由 x_1 日元现金和 x_2 份额股票构成的投资组合．如果在到期日股价是 4000 日元，那么在 T 时刻投资组合的价值是 $x_1\mathrm{e}^{rT}+4000x_2$．期权的出售者要求这个价值至少是 1000 日元，这就是说，由于利率为 0，

$$x_1+4000x_2 \geqslant 1000.$$

如果股价是 2000 日元，期权的出售者只要求投资组合的价值是非负的，也就是

$$x_1 + 2000x_2 \geqslant 0.$$

在图 1-2 中，如果 (x_1, x_2) 位于阴影区域内，那么期权的出售者就能获得 (无风险) 利润. 在区域的边界上，除两条直线的交点以外的所有点，都有获得利润的可能性而不可能有损失. 用点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 表示的投资组合准确地给出了在 T 时刻期权出售者所需要得到的权益的价值.

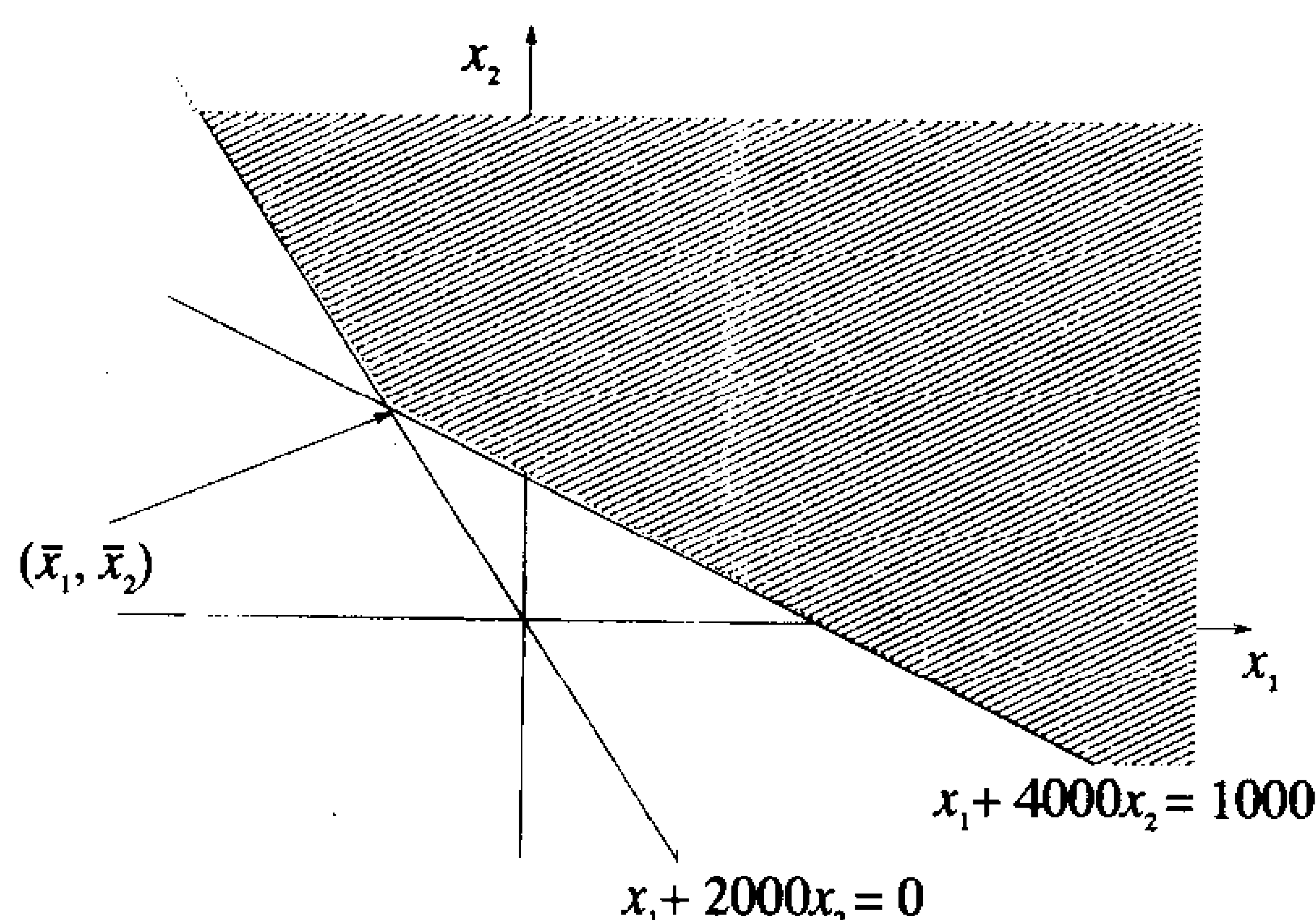


图 1-2: 在例 1.3.1 中，如果合约的出售者能够购买属于阴影区域中的任何投资组合，那么他就能获得无风险利润

求解这两个联立方程，当 $\bar{x}_1 = -1000$和$\bar{x}_2 = 1/2$ 时，期权的出售者恰好能获得权益的价值. 构造零时刻这个投资组合的费用是 $(-1000 + 2500/2)$ 日元，即 250 日 元. 对任何高于 250 日元的期权价格，出售者能获得无风险利润.

7

如果期权的价格少于 250 日元，那么购买者可以通过“借入”投资组合 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 和购买期权而获得无风险利润. 因此，在无套利的假设下，期权的公平价格是 250 日元. □

注意到就像对远期合约那样，我们不利用对可能的市场波动事先设定的可能性来达到公平价格. 我们仅需要通过简单的投资组合就可以复制权益的事实. 出售者可用由 x_1 日元的现金和 x_2 份额的股票构成的投资组合来对冲未定权益 (hedge the contingent claim)$(S_T - 3000)_+$ 日元.

我们能用同样的论证来证明下面的结果.

欧式期权定价公式

引理1.3.2 假设无风险美元利率 (到某个时界 $\tau > T$) 为 r. 用 S_0 表示某个资产在零时刻的 (美元) 价值. 假设股票价格的运动使得资产在 T 时刻的价

值为 S_0u 或 S_0d，且进一步假设

$$d < e^{rT} < u.$$

那么在到期日 T 具有收益 $C(S_T)$ 的欧式期权在零时刻的市场价格为

$$\left(\frac{1-de^{-rT}}{u-d}\right)C(S_0u)+\left(\frac{ue^{-rT}-1}{u-d}\right)C(S_0d).$$

而且，期权的出售者可以用出售期权获得的现金购买零时刻的

$$\phi \triangleq \frac{C(S_0u)-C(S_0d)}{S_0u-S_0d} \tag{1.1}$$

份额股票和持有的剩余债券，来构造一个在 T 时刻价值为 $(S_T-K)_+$ 的投资组合.

证明由习题 4(a) 给出.

1.4 三值模型

关于两值模型有几点是很特殊的. 特别地，我们假设资产价格在 T 时刻必须取两个规定值之一. 如果我们允许资产价格在 T 时刻取三个可能的值之一，情况将如何呢？

我们可以重复 1.3 节中的分析. 出售者能够通过由 x_1 日元的现金和 x_2 份额的股票构成的投资组合复制在 T 时刻的权益. 这里对应于 S_T 的 3 种可能值，将要考虑 3 种情形. 如果利率为零，那么有 3 个不等式

$$x_1+S_T^ix_2 \geqslant (S_T^i-3000)_+, \quad i=1,2,3,$$

[8] 这里 S_T^i 表示 S_T 的可能取值. 现在的图形与图 1-3 有点相像.

为了保证在 T 时刻的权益，出售者要求 (x_1,x_2) 位于阴影区域，而在这个区域的任何点，她有获得利润的绝对可能性而不可能损失. 在这个阴影区域以外的任何投资组合则有损失的风险. 不存在完全复制权益的投资组合，对期权而言也不存在惟一的“公平”价格.

市场不是完全的 (complete)，也就是说，存在不能完全对冲的未定权益.

更复杂模型

当然，我们将把工作限于对冲一种权益的方法. 首先，我们仅允许自己的投资组合由原生股票和现金债券构成. 真实的市场往往比这种情况更复杂. 如果我们允许自身同第三个“独立”产交易，那么这将在 $\mathbb{R}^3$ 中产生 3 个不平行的平面. 它们将相交于代表完全复制权益的一个投资组合的某个点. 于是，这

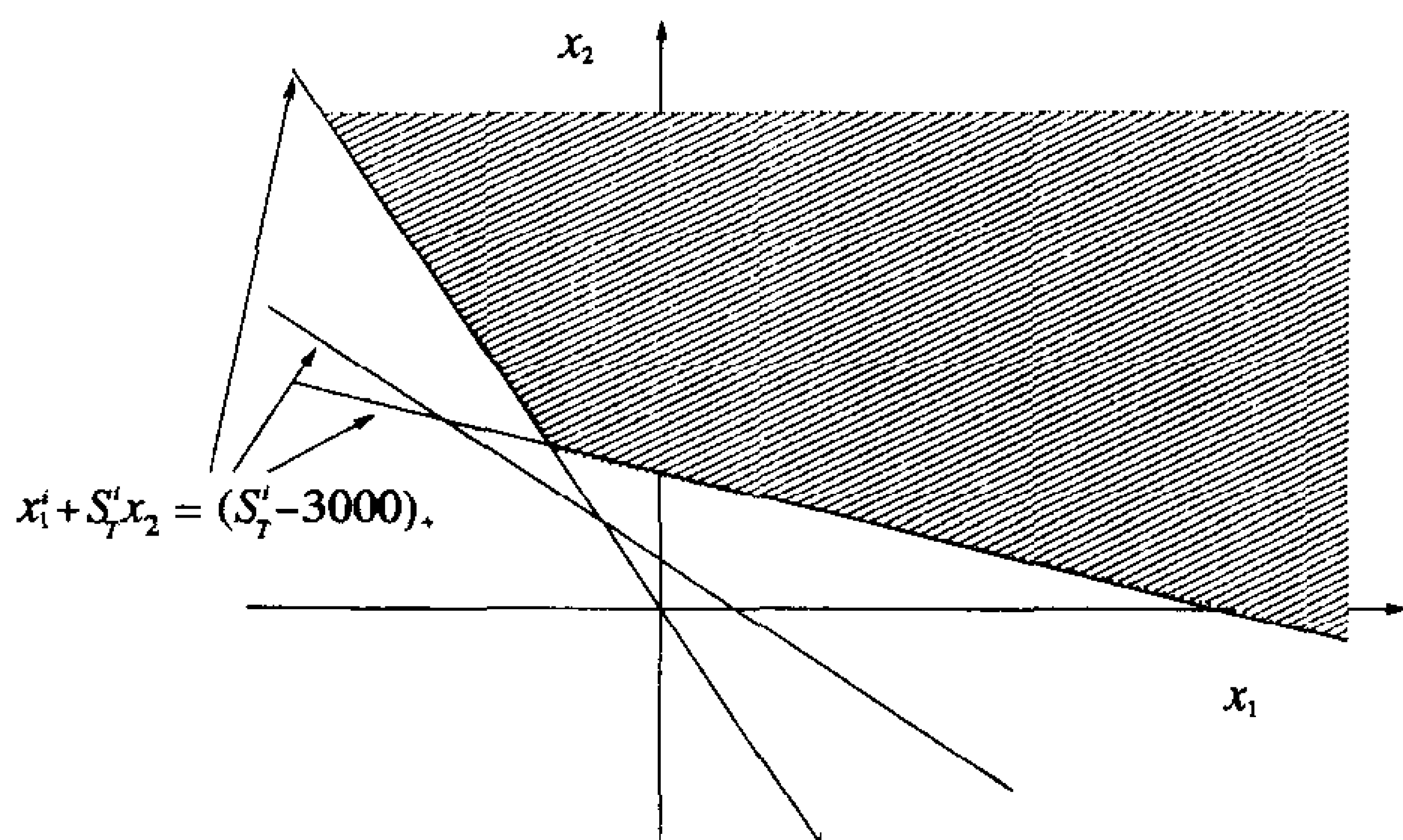


图 1-3: 如果股票价格在 T 时刻取 3 个可能的值，那么期权的出售者在任何没有损失风险的点有获得利润的绝对机会

产生了一个问题：在一个更复杂的市场模型中何时存在套利机会？在下一节的单时段模型中我们将回答这个问题. 我们已经置身于其中的第二个约束条件是不允许我们在合约的出售时间和到期日之间调整投资组合. 事实上，正像在第 2 章中看到的，如果我们考虑市场在 0 和 T 之间的某些时刻是可观测的，且允许出售者在这些时刻调整她的投资组合 (不改变它的值)，那么，我们能允许在 T 时刻股票价格可取任何可能的值，并且通过恰好由原生股票和现金债券组成的投资组合仍然可以复制在 T 时刻的每个权益.

1.5 无套利特征

在两值模型中，通过简单地求解两个联立方程容易找到期权的正确价格. 然而，两值模型是很特殊的，在后面的三值模型中，警报铃可能拉响. 两值模型仅仅描述单个股票 (和单个债券) 的演变. 对三值模型，解决种种困难的出路在于允许与另一个“独立”资产进行交易. 在本节，我们把这种思路推广到更复杂的市场模型中，这些模型的特征是存在足够多的独立资产，它们的任何期权具有公平价格. 除了定义 1.5.1 和定理 1.5.2 的论述以外，本节其他部分可以略去. [9]

现在市场由有限个 (但可能为数很大) 可交易资产组成. 我们再次限于单时段模型，其中市场只在零时刻和某个固定的未来 T 时刻是可观测的. 然而，将两值模型推广到多时段的情形与 2.1 节中叙述的多时段两值模型完全一样.

N 个资产的市场

假设在市场上存在 N 个可交易的资产，它们在零时刻的价格用列向量表示:

$$S_0 = \left(S_0^1, S_0^2, \cdots, S_0^N\right)^t \triangleq \begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix}.$$

> **记号**：对向量和矩阵用上标“t”表示转置.

市场的不确定性可用在 T 时刻有限个可能的状态来表示，记为 $i = 1, 2, \cdots, n$. 在 T 时刻证券价值可用 $N \times n$ 矩阵 $D = (D_{ij})$ 表示，这里当市场处于状态 j，系数 D_{ij} 是在 T 时刻的第 i 个证券的价值. 当 $N = 2$(股票和无风险现金债券) 和 $n = 2$(由 S_T 的两个可能值决定的两种状态) 时，即为两值模型.

在这个记号中，可以认为投资组合就是向量 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)^t \in \mathbb{R}^N$，它在零时刻的市场价值为数量积 $S_0 \cdot \theta = S_0^1\theta_1 + S_0^2\theta_2 + \cdots + S_0^N\theta_N$. 在 T 时刻，投资组合的价值是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，其第 i 个值是市场处于状态 i 时投资组合的价值. 记 T 时刻的价值为

10

$$\begin{pmatrix} D_{11}\theta_1 + D_{21}\theta_2 + \cdots + D_{N1}\theta_N \\ D_{12}\theta_1 + D_{22}\theta_2 + \cdots + D_{N2}\theta_N \\ \vdots \\ D_{1n}\theta_1 + D_{2n}\theta_2 + \cdots + D_{Nn}\theta_N \end{pmatrix} = D^t\theta.$$

> **记号**：对于向量 $x \in \mathbb{R}^n$，如果对 $\bar{x}$ 所有的 $i = 1, \cdots, n$ ，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 以及 $x_i \geqslant 0$, 则记 $x \geqslant 0$ 或 $x \in \mathbb{R}_+^n$.$x > 0$ 表示 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$. 注意 $x > 0$ 并不要求对它的所有坐标严格正. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, 记 $x \gg 0$ 或 $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ 表示它的所有坐标是严格正的.

在这个记号中，套利 (arbitrage) 是一个投资组合 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 且满足

$$S_0 \cdot \theta \leqslant 0,\ D^t\theta > 0 \quad 或 \quad S_0 \cdot \theta < 0,\ D^t\theta \geqslant 0.$$

套利定价

在这个模型中， 套利定价的关键是状态价格向量的概念.

定义1.5.1 状态价格向量是一个满足 $S_0 = D\psi$ 的向量 $\psi \in \mathbb{R}_{++}^n$.

为了说明用这个术语是自然的，我们首先用分量写出

$$\begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} = \psi_1 \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ \vdots \\ D_{N1} \end{pmatrix} + \psi_2 \begin{pmatrix} D_{12} \\ D_{22} \\ \vdots \\ D_{N2} \end{pmatrix} + \cdots + \psi_n \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \\ \vdots \\ D_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

向量 $D^{(i)}$ 乘以 ψ_i 表示当市场处于状态 i 时证券价格向量. 可以认为 ψ_i 是当系统处于状态 i 时，在这段时间的最后时刻获得的一份额外份额的价值在零时刻的边际成本. 换句话说，如果在这段时间的最后时刻，市场处于状态 i，那么对在零时刻每一个附加的投资 ψ_i，投资组合的价值增加到 1. 为了明白这一点，假设能找到向量 $\{\theta^i \in \mathbb{R}^N\}_{1\leqslant i\leqslant n}$，使得

$$\theta^{(i)} \cdot D^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

也就是说，在 T 时刻，投资组合 $\theta^{(i)}$ 的价值是市场在状态 i 时的指示函数. 从而，根据等式 (1.2)，在零时刻购买 $\theta^{(i)}$ 的费用就是 $S_0 \cdot \theta^{(i)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_j D^j\right) \cdot \theta^{(i)} = \psi_i$. 这样的投资组合 $\{\theta^{(i)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 称为Arrow-Debreu 证券 (Arrow-Debreu security).

在 1.6 节中，我们将用一个更简便的方法来处理状态价格向量，但在这里，首先给出一个主要的结果.

定理1.5.2 对上面描述的市场模型，市场无套利当且仅当存在状态价格向量.

11

由 Harrison & Kreps (1997) 给出的这个结果是通常被称为资产定价基本定理的最简单形式. 证明是 Hahn-Banach 分离定理的一个应用，有时称为分离超平面定理 (Separating Hyperplane Theorem). 我们也需要 里斯表示定理 (Riesz Representation Theorem). 回顾 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个锥，如果 $x \in M$，对所有严格正数 λ，蕴涵 $\lambda x \in M$，同时 $\mathbb{R}^d$ 中的线性泛函 (linear funtional) 是一个线性映射 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

定理1.5.3 (分离超平面定理) *假设 M 和 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中在原点恰好相交的闭凸锥. 如果 K 不是线性子空间，那么对每个 $x \in M$ 和每个非零的 $y \in K$，存在非零的线性泛函 F 使得 $F(x) < F(y)$.*

分离超平面定理的这种形式可在 Duffie (1992) 中找到.

定理1.5.4 (里斯表示定理) *$\mathbb{R}^d$ 空间上任一有界线性泛函可写为 $F(x) = v_0 \cdot x$，即 $F(x)$ 是某个固定的向量 $v_0 \in \mathbb{R}^d$ 与 x 的内积.*

定理1.5.2 的证明 在定理 1.5.3 中取 $d = 1+n$，且令

$$M = \left\{(-S_0 \cdot \theta, D^t\theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1+n},$$

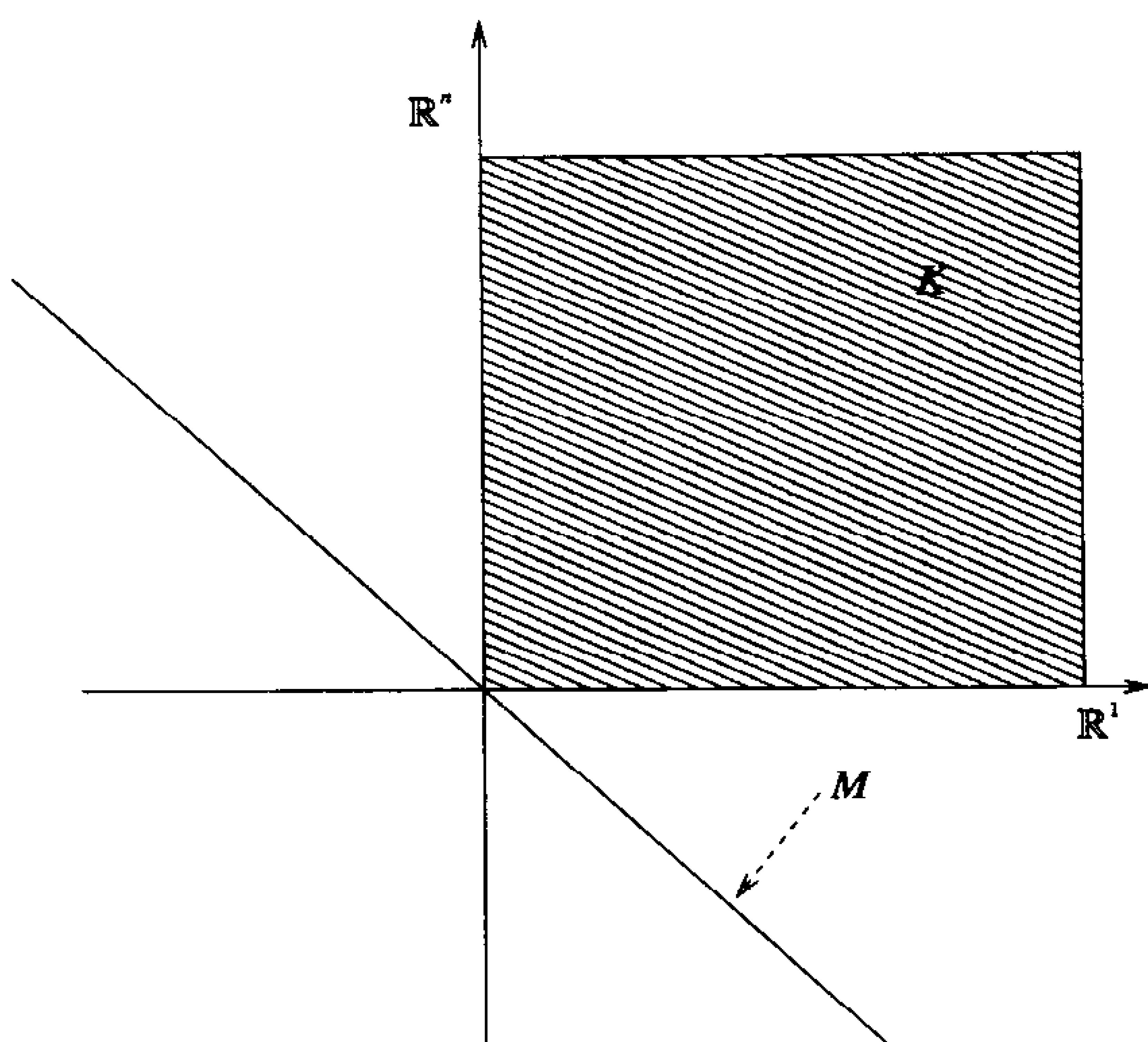


图 1-4: 市场无套利当且仅当定理 1.5.2 中的区域 K 和 M 仅在原点相交

$$K = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n.$$

12

注意 K 是一个锥而不是一个线性空间，M 是一个线性空间. 显然，如图 1-4 所示，存在无套利机会当且仅当 K 和 M 在原点正好相交. 因此必须证明 $K \cap M = \{0\}$ 当且仅当存在状态价格向量.

(i)首先假设$K \cap M = \{0\}$. 由定理 1.5.3，存在线性泛函 $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 使得对所有的 $z \in M$ 和非零的 $x \in K$，$F(z) < F(x)$.

第一步是证明 F 在 M 上必定为零. 我们利用 M 是线性空间的事实. 首先由观察可知 $F(0) = 0$(根据 F 的线性性) 和 $0 \in M$. 因此，对 $x \in K$，$F(x) \geqslant 0$ 对 $x \in K \backslash \{0\}$，$F(x) > 0$. 固定 $x_0 \in K$ 且 $x_0 \neq 0$. 现在取任意的 $z \in M$，则 $F(z) < F(x_0)$. 由于 M 是线性空间，因此对所有的 $\lambda \in \mathbb{R}$，也有 $\lambda F(z) = F(\lambda z) < F(x_0)$. 这个结果只有当 $F(z) = 0$ 时才能成立. $z \in M$ 是任意的，因此在 M 上 F 必定为零.

实际上我们现在利用这一点以显式方式来构造 F 中的状态价格向量. 首先由里斯表示定理，对某个 $v_0 \in \mathbb{R}^d$，记 F 为 $F(x) = v_0 \cdot x$. 为了方便，记 $v_0 = (\alpha, \phi)$，这里 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\phi \in \mathbb{R}^n$. 于是

$$F(v, c) = \alpha v + \phi \cdot c, \quad 对任何 \quad (v, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d.$$

因为对所有非零的 $x \in K$，$F(x) > 0$，所以必有 $\alpha > 0$ 和 $\phi \gg 0$(考虑沿着每个坐标轴的向量). 最后，由于在 M 上 F 为零，

$$-\alpha S_0 \cdot \theta + \phi \cdot D^t \theta = 0, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}^N.$$

观察到 $\phi \cdot D^t\theta = (D\phi) \cdot \theta$，上式成为

$$-\alpha S_0 \cdot \theta + (D\phi) \cdot \theta = 0, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}^N,$$

这意味着 $-\alpha S_0 + D\phi = 0$. 换句话说，$S_0 = D(\phi/\alpha)$. 因此向量 $\psi = \phi/\alpha$ 是一个状态价格向量.

(ii)现在假设存在状态价格向量 ψ. 我们必须证明 $K \cap M = \{0\}$. 根据定义，$S_0 = D\psi$，因此对任意投资组合 θ，

$$S_0 \cdot \theta = (D\psi) \cdot \theta = \psi \cdot (D^t\theta). \tag{1.3}$$

假设对某个投资组合 θ，$(-S_0 \cdot \theta, D^t\theta) \in K$. 于是有 $D^t\theta \in \mathbb{R}^n_+$ 和 $-S_0 \cdot \theta \geqslant 0$. 但由于 $\psi \gg 0$，如果 $D^t\theta \in \mathbb{R}^n_+$，那么 $\psi \cdot (D^t\theta) \geqslant 0$. 根据等式 (1.3)，有 $S_0 \cdot \theta \geqslant 0$. 因此必有 $S_0 \cdot \theta = 0$ 和 $D^t\theta = 0$，也就是 $K \cap M = \{0\}$. 得证. □

1.6 风险中性概率测度

对多资产市场模型，状态价格向量是套利定价的关键. 虽然我们已经对此有了经济上的解释，为了引出概率和鞅的完整方法，我们需从不同的角度来考虑.

回忆 ψ 的所有分量严格是正的.

13

状态价格和概率

记 $\psi_0 = \sum_{i=1}^n \psi_i$，我们可以把

$$\underline{\psi} \triangleq \left(\frac{\psi_1}{\psi_0}, \frac{\psi_2}{\psi_0}, \cdots, \frac{\psi_n}{\psi_0}\right)^t \tag{1.4}$$

看成以不同状态存在的概率向量. 特别强调的是，它们可能完全与我们观察到的市场如何波动无关. 首先，

ψ_0 是什么？

假设像在两值模型 (其中有一种无风险现金债券) 中那样，允许市场有正的无风险利率. 在这种一般的情形下，我们只假设通过投资组合 $\bar{\theta}$，可以复制这样的债券使得

$$D^t\bar{\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

即不管市场处于何种状态，在 T 时刻投资组合的价值是 1. 利用 ψ 是一个状态价格向量的事实，我们计算这样的投资组合在零时刻的费用是

$$S_0 \cdot \bar{\theta} = (D\psi) \cdot \bar{\theta} = \psi \cdot (D^t \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i = \psi_0.$$

重用期望

即 ψ_0 代表无风险利率的贴现. 用 1.2 节的记号，$\psi_0 = \mathrm{e}^{-rT}$.

现在在由向量 (1.4) 给出的概率分布下，在 T 时刻第 i 个证券的期望值是

$$\mathbb{E}[S_T^i] = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \frac{\psi_j}{\psi_0} = \frac{1}{\psi_0} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \psi_j = \frac{1}{\psi_0} S_0^i,$$

这里在最后的等式中我们已经用到了 $S_0 = D\psi$. 也就是

$$S_0^i = \psi_0 \mathbb{E}[S_T^i], \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.5}$$

这说明在概率分布 (1.4) 下，任何证券的价格都是它的贴现期望收益. 同样的结论对任何投资组合必定成立. 这一点为我们考虑未定权益的定价提供了一个新思路.

定义1.6.1 *称权益 C 在 T 时刻是可达的，如果它能被对冲，即存在在 T 时刻价值正好为 C 的投资组合.*

14

> **记号：** 当要强调概率测度 $\mathbb{Q}$ 时，用 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ 表示期望算子.

定理1.6.2 *如果市场无套利，那么在 T 时刻的可达权益 C 在零时刻的惟一价格是 $\psi_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C]$，这里期望与任何概率测度 $\mathbb{Q}$ 有关，而对这样的 $\mathbb{Q}$ 而言，对于所有 i 和 ψ_0，$S_0^i = \psi_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^i]$ 是关于无风险利率的贴现.*

注释 注意关键是权益是可达的 (见习题 11). □

定理1.6.2的证明 根据定理 1.5.2，存在状态价格向量，从而有概率测度 (1.4) 对所有的 i 满足 $S_0^i = \psi_0 \mathbb{E}[S_T^i]$. 由于权益能被对冲，故存在投资组合 θ 使得 $\theta \cdot S_T = C$. 在无套利的情况下，权益在零时刻的价格就是这个投资组合在零时刻的费用

$$\theta \cdot S_0 = \theta \cdot (\psi_0 \mathbb{E}[S_T]) = \psi_0 \sum_{i=1}^{N} \theta_i \mathbb{E}[S_T^i] = \psi_0 \mathbb{E}[\theta \cdot S_T].$$

由于在无套利情况下，只存在惟一的无风险利率，所以如果期望是对任何概率向量 $\mathbb{Q}$ 计算的，而对这样的 $\mathbb{Q}$，$S_0^i = \psi_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^i]$，那么获得同样的值. 证毕. □

用这个说法，套利定价结果告诉我们，如果能找到一个概率测度，使得每个原生证券在零时刻的价值是它在 T 时刻的贴现期望值，那么我们就能通过计算任何可达的未定权益的贴现期望求出它在零时刻的价值. 注意到无论权益是什么，我们都用同样的概率向量.

风险中性定价

定义1.6.3 如果在 T 时刻市场处于 n 种可能的状态之一，那么对每个证券价格是它的贴现期望收益的概率向量 $\underline{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \gg 0$，称其为风险中性概率测度或等价鞅测度.

术语等价反映了条件 $p \gg 0$，参见定义 2.3.12. 资产定价基本定理 (定理 1.5.2) 的简单形式指出在一个无风险利率为正的市场中，市场无套利当且仅当存在等价鞅测度. 我们将把通过计算与风险中性概率测度有关的期望这个定价过程称为*风险中性定价* (risk- neutral pricing).

例1.3.1重现 回到关于欧式看涨期权定价的第一个例子，并证实上述公式实际上给出套利价格.

现在恰有两个证券，一个是现金债券，另一个是原生股票. 在借贷情况下，贴现为 $\psi_0 = e^{-rT}$，但我们假设日元利率为零，因此 $\psi_0 = 1$. 在 T 时刻证券价值的矩阵是

15

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4000 & 2000 \end{pmatrix}.$$

记 p 为风险中性概率，其证券价格向量为 $(1, 4000)^t$. 如果股票价格等于它的贴现期望收益，则 p 必须满足方程

$$4000p + 2000(1-p) = 2500,$$

它的解为 $p = 0.25$. 如果在到期日股票价格是 4000 日元，则未定权益为 1000 日元，否则为零. 在风险中性概率下，权益的期望值，以及由此而来的期权价格 (因为利率为零) 是 0.25日元 $\times$ 1000 = 250 日元，结果与前面相同.

这个方法的优点是，用概率 p 作支持. 通过取同样概率测度的期望，对于具有相同到期日 (6 个月时间) 股票的所有欧式期权的定价，现在成为一件容易的事情. 例如，对敲定价格为 3500 日元的欧式看跌期权，其价格为

$$\mathbb{E}[(K - S_T)_+] = 0.75 \times 1500 = 1125 \quad (\text{日元}).$$

对每个新的权益，我们原来的论证有可能产生一个新的联立方程组. □

如果存在权益的套利价格，也就是权益是可达的，那么我们现在对套利价格有了一种处理方法. 但必须小心，即使该方法是可行的，套利价格也只对可达权益是存在的.

完全市场

定义1.6.4 市场称为完全的，如果每个未定权益是可达的，即如果能够对冲每个可能的衍生产品的权益.

命题1.6.5 一个由 N 个可交易资产组成的按照单时段模型演变的市场，如果在这段时期的最后处于 n 个可能的状态之一，那么它是完全的当且仅当 $N \geqslant n$ 和证券价格矩阵 D 的秩是 n.

证 在市场中，任何权益可以表示为向量 $v \in \mathbb{R}^n$. 对权益的对冲将是一个投资组合 $\theta = \theta(v) \in \mathbb{R}^N$，它满足 $D^t\theta = v$. 通过解 N 个未知数的 n 个方程，找出这样的 θ. 因此对每个 v 的选取，对冲投资组合存在当且仅当 $N \geqslant n$ 和 D 的秩是 n. 证毕. □

特别地，注意单时段两值模型是完全的.

假设市场是完全的和无套利的，$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}'$ 表示任何两个等价鞅测度. 根据完全性每个权益是可达的. 因此利用只存在惟一的无风险利率的事实，对每个随机变量 X，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}[X].$$

[16] 换句话说，$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$. 因此在一个完全的无套利市场，等价鞅测度是惟一的.

到目前为止的主要结果

对单时段市场的主要结果总结如下， 这些结果将会被反复提到.

单时段模型的结果：

- 市场是无套利的当且仅当存在鞅测度 $\mathbb{Q}$.
- 市场是完全的当且仅当 $\mathbb{Q}$ 是惟一的.
- 可达权益 C 的套利价格是 $e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C]$.

鞅测度是一个强有力的工具. 然而，在一个不完全市场，如果权益 C 是不可达的，那么不同的鞅测度可给出不同的价格. 公平价格的无套利概念仅仅当能对冲时才有意义.

在两个不同的市场交易

我们必须更小心试探. 重要的是，在计算风险中性概率中所有被建立了模型的资产在同一个市场是可交易的. 我们用一个例子来说明.

例1.6.6 假设在美元市场当前的英镑汇率是 1.5(因此 100 英镑可兑换 150 美元). 考虑一个欧式看涨期权，它赋予持有人在 T 时刻以 150 美元购买 100 英镑的权利. 无风险利率在英国是 u 和在美国是 r. 假设一个单时段两值模型在到期时间的汇率是 1.65 或 1.45，求出这个期权的公平价格.

解 现在有一个问题. 汇率是不可交易的资产. 在美元市场，英镑现金债券也是不可交易的资产. 但在英镑市场，它却是一个可交易资产. 然而，两者的乘积是一个美元可交易资产，用 S_t 表示该积在 t 时刻的价值.

现在，因为在英国，无风险利率是 u，对英镑现金债券的价格如果允许在 T 时刻支付 1 英镑，那么它在零时刻是 e^{-uT}. 当然，在 T 时刻债券价格是 1. 因此我们有 $S_0 = e^{-uT}150$ 和 $S_T = 165$ 或 $S_T = 145$.

设 p 表示 $S_T = 165$ 时的风险中性概率，因为在 T 时刻的“资产”的贴现

价格 (在美元市场) 必有期望 S_0，故得

$$150\mathrm{e}^{-uT}=\mathrm{e}^{-rT}(165p+145(1-p)),$$

由此求出

$$p=\frac{150\mathrm{e}^{(r-u)T}-145}{20}.$$

期权的价格是关于这个概率的贴现期望收益，其值为 17

$$V_0=\mathrm{e}^{-rT}15p=\frac{3}{4}\left(150\mathrm{e}^{-uT}-145\mathrm{e}^{-rT}\right).$$ □

习　题

1. 从下列每一种策略中能反映出有关市场的什么看法？

(a) *牛市垂直差价期权* (Bullish Vertical Spread)：买进一个欧式看涨期权，卖出另一个具有相同到期日但敲定价格较高的欧式看涨期权.

(b) *熊市垂直差价期权* (Bearish Vertical Spread)：买进一个欧式看涨期权，卖出另一个具有相同到期日但敲定价格较低的欧式看涨期权.

(c) *看跌三合期权* (Strip)：买进一个欧式看涨期权和两个具有相同执行日和敲定价格的欧式看跌期权.

(d) *看涨三合期权* (Strap)：买进两个欧式看涨期权和一个具有相同执行日和敲定价格的欧式看跌期权.

(e) *异价对敲* (Strangle)：买进一个欧式看涨期权和一个具有相同到期日但不同的敲定价格 (考虑所有可能的情形) 的欧式看跌期权.

2. *蝶式差价期权* (butterfly spread) 表示对一手买进一手卖出策略的补充选择. 在到期日，它有下列收益：

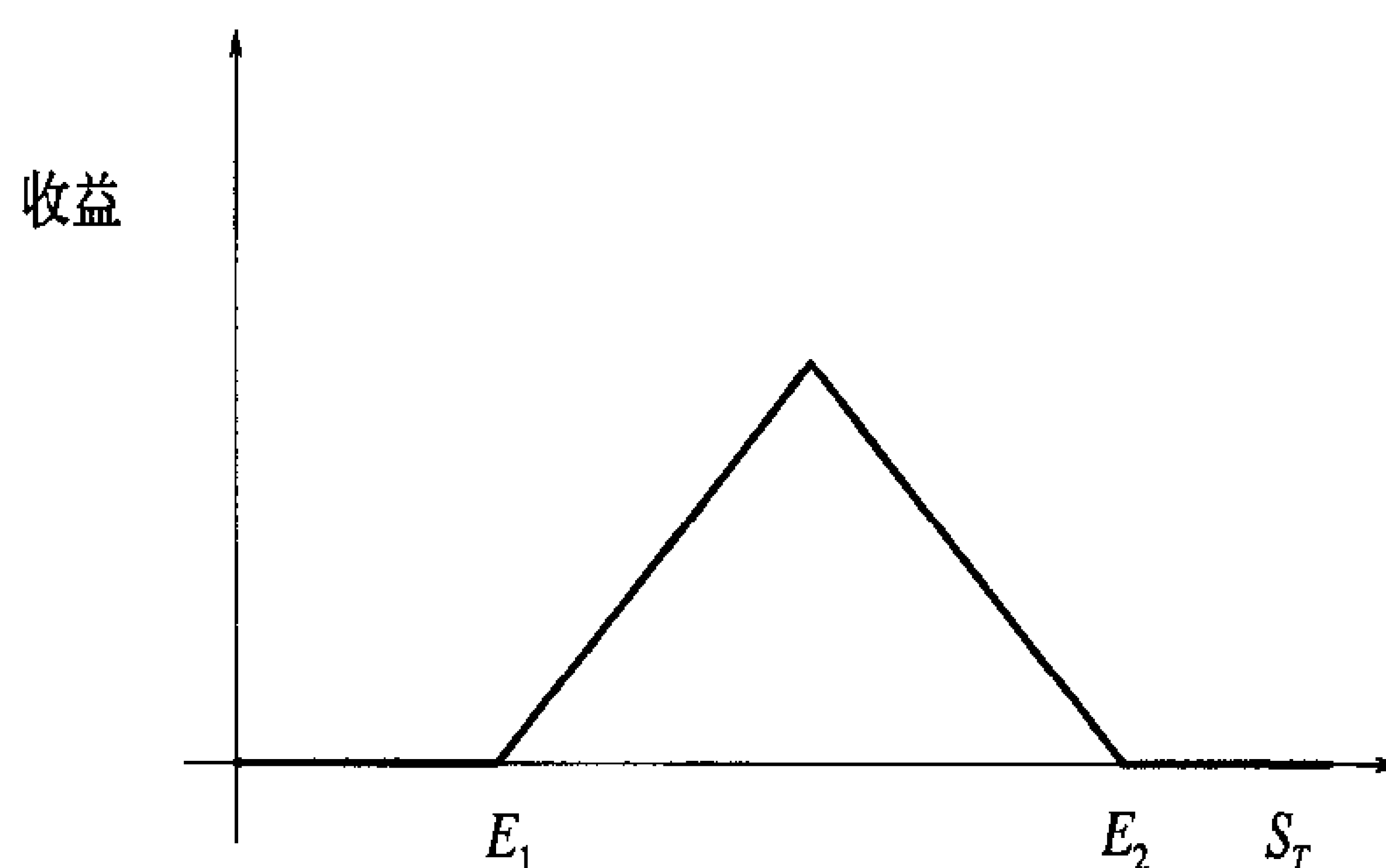
求由具有相同到期日的欧式看涨和看跌期权构成且具有这个收益的投资组合.

3. 假设某种资产的价格服从对数正态分布，即 $\log(S_T/S_0)$ 服从均值为 ν 和方差为 σ^2 的正态分布. 计算 $\mathbb{E}[S_T]$.

4. (a) 证明引理 1.3.2.

(b) 如果去掉假设 $d<\mathrm{e}^{rT}<u$，将会发生什么？

5. 假设当前汇率是 100 英镑兑换 160 欧元. 投机者确信在年末 1 英镑有 1/2 的可能性会跌到 1.40 欧元和 1/2 的机会将会涨到 2.00 欧元. 因此他买进一个欧式看跌期权，赋予他在年末以 1.80 欧元出售 100 英镑权利 (但不负有义务). 他为这个期权



支付 20 欧元. 假设在欧元区无风险利率为零. 利用单时段两值模型，构造一个策略并证明当事人必有一方可以获利或证明这是一个公平价格.

[18] 6. 如果给基于像石油这样的商品的期权定价，应该怎样修改例 1.3.1 中的分析？

7. 证明如果市场无套利，那么在零时刻构造的在 T 时刻精确地复制权益 C 的任何投资组合在零时刻都有同样的值.

8. *看跌 – 看涨期权平价公式* (Put-call parity)：用 C_t 和 P_t 分别表示在 t 时刻的欧式看涨和欧式看跌期权的价格，它们具有相同的到期日 T 和敲定价格 K. 假设无风险利率 r 是常数，且市场无套利. 证明对每个 $t \leqslant T$，

$$C_t - P_t = S_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}.$$

9. 用风险中性定价方法确定习题 5 中期权的价值. 通过构造在合约的到期日精确地复制权益的投资组合来验证你的答案.

10. 在到期日远期合约的收益是什么？试用风险中性定价方法求解远期合约的定价问题.

11. 对 1.4 节中的原生资产，考虑三值模型. 存在多少等价鞅测度？如果存在两个不同的鞅测度，那么它们对一个权益能给出相同的价格吗？存在套利机会吗？

12. 假设在 T 时刻某个股票的价格是具有分布 $\mathbb{P}$ 的随机变量，注意这里无需假设为两值模型. 该股票上载明的期权在 T 时刻收益为 C. 考虑由 ϕ 份额原生资产和 ψ 份额债券构成的投资组合，持有到 T 时刻，且记 V_0 为它在零时刻的价值. 假设利率为零. 证明在 T 时刻，权益为 C 的该投资组合的持有者所需的额外现金是

$$\Psi \triangleq C - V_0 - \phi(S_T - S_0).$$

对 V_0 和 ϕ 的值，求出使

$$\mathbb{E}[\Psi^2]$$

取最小值的表达式 (用 $\mathbb{E}[S_T], \mathbb{E}[C], \mathrm{var}[S_T]$ 和 $\mathrm{cov}(S_T, C)$ 表示)，且对这些值验证 $\mathbb{E}[\Psi]=0$.

证明对两值模型，任何权益 C 线性依赖于 $S_T - S_0$. 由此推断在该情形下，能找到 V_0 和 ϕ 使得 $\Psi=0$.

如果模型是不完全的，那么使 $\mathbb{E}[\Psi^2]$ 达到最小值的参数对应于求解 C 的最佳线性逼近 (基于 $S_T - S_0$). 期望的对应值是期权内在风险 (intrinsic risk) 的一个测度. 19

13. 远期汇率 (Exchange rate forward)：假设无风险利率在英国为 u，在美国为 r. 一个美元投资者希望设定汇率 C_T，在远期合约中两个当事人愿意在 T 时刻以 1 英镑兑换 C_T 美元. 如果 1 英镑现值为 C_0 美元，C_T 的公平价值是多少？

14. 在例 1.6.6 中，期权卖方出售一个数字期权 (digital option) 给投机者. 这相当于是资产价格上升的赌注. 如果汇率上升到每 100 英镑兑换 165 美元，收益是固定量的现金. 如果汇率下降，收益为零. 如果投机者为这个赌注支付 10 美元，那么期权卖方愿以什么价格出售该期权？我们可以假设利率为零.

15. 现在假设在例 1.6.6 中期权的卖方在英镑市场中操作. 重新表述英镑可交易的市场和求相应的风险中性概率. 它们与由美元交易者计算的风险中性概率相同吗？由英镑交易者计算的期权在零时刻的美元费用是多少？

这是计价单位变换 (change of numeraire) 的一个例子. 美元交易者使用美元债券作为无风险资产的参照物，而英镑交易者使用英镑债券. 20

第 2 章 二项式树和离散参数鞅

引 言

本章我们建立一些更复杂的市场模型，这些模型在一连续的时段内追踪股票价格的演化过程. 在每一个单时段上，市场遵循第 1 章的简单的两值模型. 股票价格演化的轨迹构成一棵树. 第 1 章所得结果的一个推论，就是通过对树的某些概率取期望，而依托这棵树的股票价格演化过程是一个离散参数鞅 (martingale) 过程，那么我们能够对权益进行定价.

离散参数鞅的定义和基本性质在 2.3 节中表述和解释，并且我们首次看到怎样能把鞅方法作为一个比较好的计算工具来使用. 接着在 2.4 节给出一些重要的鞅的定理. 在 2.5 节中，通过显示在鞅的框架下怎样去构造复制权益的投资组合，为第 5 章的 Black-Scholes 分析铺平道路. 在 2.6 节我们以取极限的试探方式预览 Black-Scholes 公式.

2.1 多时段两值模型

当然，单时段的两值模型作为资产价格的演化模型是不适宜的. 特别地，我们只允许在 0 和 T 时刻观察市场. 而且，在 T 时刻已经假设股票的价格只能取两种可能值之一. 在本节通过把单时段模型的多个拷贝连成一棵树来构造更为复杂的市场模型.

这里金融市场仍然只由股票和现金债券这两种金融工具构成. 与前面一样假设它们都可无限制地进行买卖，且没有交易费用. 这里假设没有违约风险，且市场确定按同一价格买卖证券是安全的 [即没有买卖 (bid-offer) 价差].

假定市场在时刻 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 是可观察的.

股票

在每个时段 $[t_i, t_{i+1}]$ 上，股票遵循两值模型，即如图 2-1 所示. 在第 i 时段后， 股票的价格就有 2^i 种可能值. 然而，在 t_i 时刻给定股票的值，则

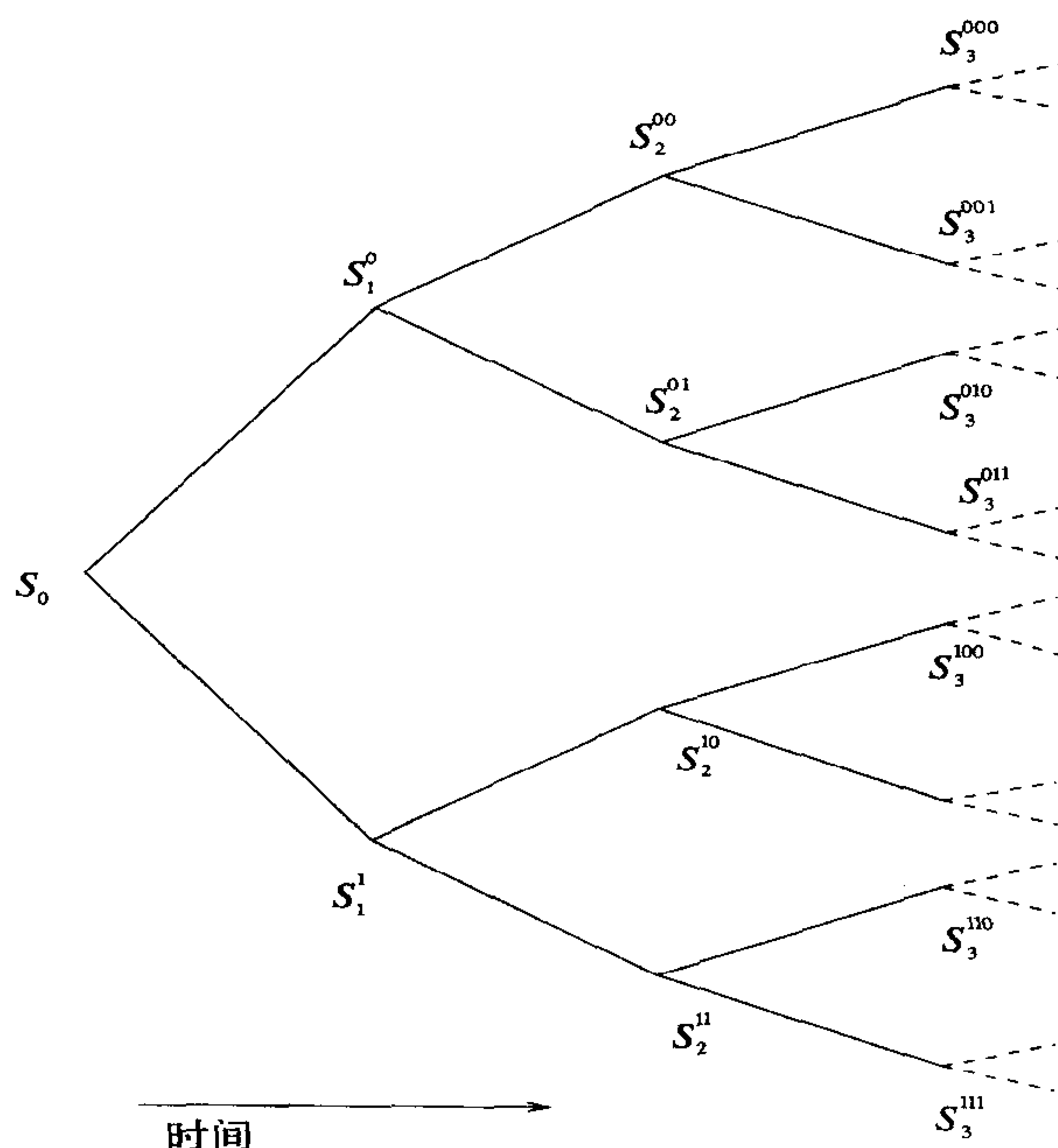


图 2-1: 股票价格树

在 t_{i+1} 时刻股票价格仅有两种可能的值. 按照惯例，假定所有的时段都有相同的步长，可记 $t_i = i\delta_t$, 其中 $\delta_t = T/N$，虽然这是不必要的.

在这个简单的模型中，现金债券的走势是完全可以预知的. 存在一个已知的利率 r，在一个长度为 T 的时段内现金债券以因子 e^{rT} 的倍数持续增长. 现在，不一定要加上这样一个苛刻的条件. 利率在不同的时段上可以随机变动. 假定在时段 $[t_i, t_{i+1})$ 上，利率一开始就是已知的，那么我们的工作马上就可以展开，尽管这可能依赖于我们的市场处在 2^i 个节点的某一个节点上. 在这种方法里，我们允许现金债券也可以是随机的. 然而要注意的是现金债券的随机性与股票的随机性是完全不同的. 对于我们来说现金债券在 t_{i+1} 时刻的值在 t_i 时刻就已经知道了，而对股票而言该结论当然不成立. 在这里为了简便起见仍然假定利率 r 是常数.

现金债券

[22]

初看之下，并不能认清新的模型就能使我们取得进展. 对于一个由 k 个时段构成的树而言，股票的价格有 2^k 种可能值. 我们现在回头来看命题 1.6.5，它认为若要求市场是完全的，那么在市场中至少需要 2^k 种股票来交易. 当 $k = 20$ 时就需要超过一百万个"独立"的资产，远多于实际市场中所见到的情况. 但是事情也不是如此糟糕. 如果允许在每个时段之后重新调整复

复制投资组合

制的投资组合，那么更多权益是可达的. 我们要加的惟一限制就是这种重新调整不能涉及任何额外现金的流入，即股票的购入必须通过出售债券提供资金，反之亦然. 这将在后面作为自融资 (self-financing) 的性质.

在树上逆向归纳

这个复杂的模型中理解定价和对冲的关键是在股票价格的树上逆向归纳.

例2.1.1 (欧式看涨期权定价) 仍然假设我们正在定价一个到期日为 T 的欧式期权. 如上，设 $\delta_t = T/N$ 使 T 对应于 N 时段，记 S_i 为 $i\delta_t$ 时刻的股票价格，在 T 时刻期权的收益记为 C_N.

方法 关键思想如下. 假设已知的股票价格在时刻 $(N-1)\delta_t$ 的值为 S_{N-1}. 由前面的分析可知期权在 $(N-1)\delta_t$ 时刻的值为 C_{N-1}. 特别是，$C_{N-1} = \psi_0^{(N)}\mathbb{E}_{N-1}[C_N]$，其中期望是相对于一个概率测度而言的，在这个概率测度下 $S_{N-1} = \psi_0^{(N)}\mathbb{E}_{N-1}[S_N]$, $\psi_0^{(N)} = \mathrm{e}^{-r\delta_t}$. (在利率变动的情况下，利率 r 必须由树上相应的 S_{N-1} 值为已知的节点上的利率来代替). 进而由引理 1.3.2 可知在 $(N-1)\delta_t$ 时刻如何构造一个投资组合，使它在 $N\delta_t$ 时刻的值恰为 C_N

在这种方法里，为了可以计算出 $(N-1)\delta_t$ 时刻 2^{N-1} 个节点中每一个节点上 C_{N-1} 的值，就需要去构造一个投资组合使它在 T 时刻的值恰好为权益 C_N.

现在考虑把 C_{N-1} 作为 $(N-1)\delta_t$ 时刻的权益，并且重复这个过程. 如果 S_{N-2} 已知，就可以在 $(N-2)\delta_t$ 时刻构造一个投资组合，使它在 $(N-1)\delta_t$ 时刻的值恰为 C_{N-1}，且这个投资组合的费用为 $\psi_0^{(N-1)}\mathbb{E}_{N-2}[C_{N-1}]$，其中该期望是相对于一个使得 $S_{N-2} = \psi_0^{(N-1)}\mathbb{E}_{N-2}[S_{N-1}]$ 的测度. 这里仍有 $\psi_0^{(N-1)} = \mathrm{e}^{-r\delta_t}$. 继续此方法，在每个时刻作适当的调整，但没有额外的资金流入也不支付红利，那么我们就可以依次计算出刚好满足我们在 $N\delta_t$ 时刻的权益的投资组合的费用. 我们将在例 2.1.2 中解释这种方法. □

二项式树

[23]

考虑二项式树的一种特殊形式， 在每一个时段 $[t_i, t_{i+1}]$ 股票的价格从当前的价格 S_i 增加到 $S_i u$ 或减少到 $S_i d$，u, d 为常数，且 $0 < d < u < \infty$. 在这样一棵树上，同样的股票价格可以由不同的路径获得. 例如在 t_2 时刻的值 $S_0 ud$ 可以看作是股票的价格先向上再向下运动的结果，反之亦然. 股价的树取图 2-2 的形式. 这样的一棵树称作重组体 (recombinant) (不同的分支能够重组). 这些经过特殊重组的树也称作二项式树 (binomial tree)，这是因为 (如果 u, d 和 r 是不随时间变化的常数) 在每个前向的分支上风险中性概率测度是一样的，所以股票在 $t_n = n\delta_t$ 时刻的价格是由二项式树的分布决定的. 这样的树比一般的二项式树在计算上要容易得多，并且我们将可看到对于我们要达到的目标它是相当适合的. 二项式树模型是由 Cox，Ross 和 Rubinstein (1979) 引进的，它在金融衍生证券行业中扮演了一个关键的角色.

我们现在来解释在一棵重组树上逆向归纳的方法.

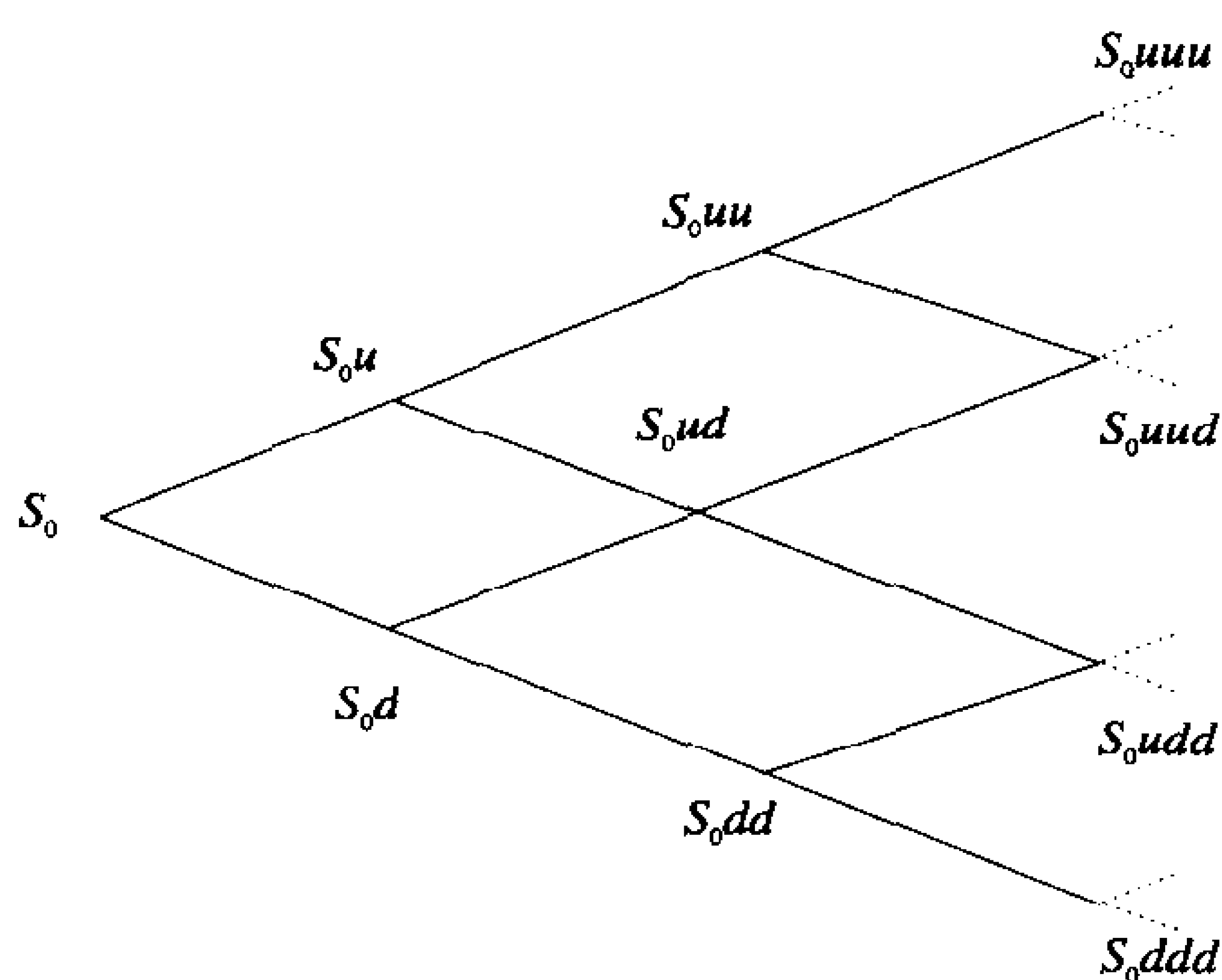
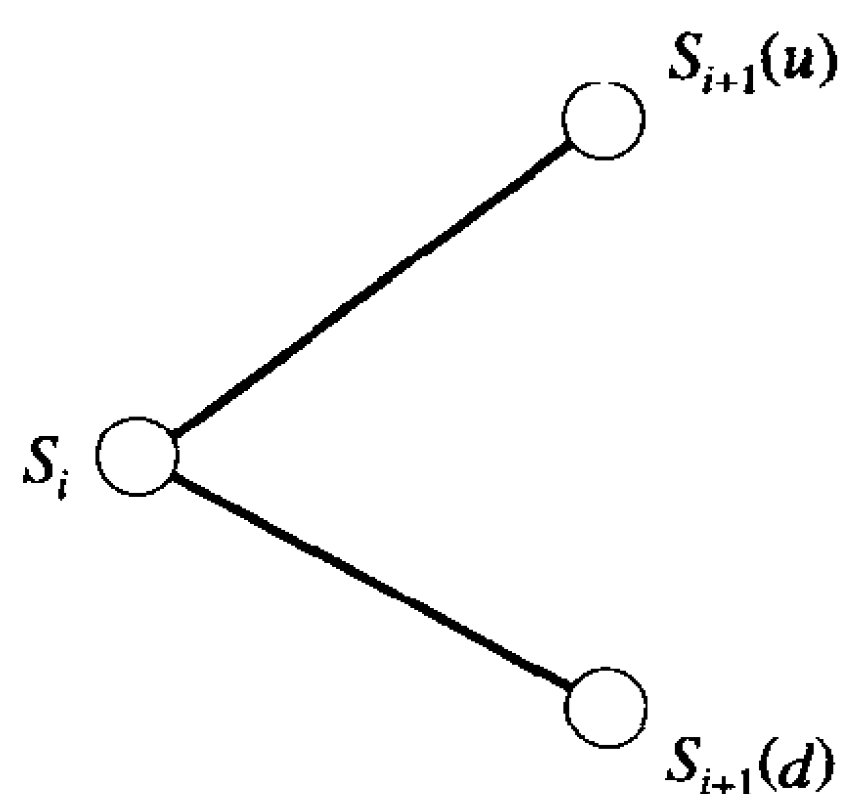


图 2-2: 股票价格的重组体或二项式树

例2.1.2 假定股价是由图 2-3 中的树给定的且 $\delta_t = 1$. 如果利率为 0, 那么在时刻 3 以 100 的价格购买股票的期权金额是多少?

解 容易写出在时刻 3 权益的值. 从上向下看，这些值分别是 60,20,0 和 0.

接下来需要求出这种格式在每个时段上相应的 3 个节点上的风险中性概率. 显然在这个例子中每个节点上上升的概率为 1/2. 现在可以计算出在倒数 [24]



第二时刻，即时刻 2 上期权的值，再从上向下看分别是 40,10,0. 在时刻上重复这个过程得到值 25(如果价格从 0 时刻上升) 和 5(如果价格下降). 那么，最后在 0 时刻期权的值为 15.

由于写出了这棵树上每个节点处期权的值，我们现在就能够构造一个投资组合，根据引理 1.3.2 的规定使它可以精确地复制出时刻 3 时的权益. 记 (ϕ_i, ψ_i) 为时段 $[(i-1)\delta_t, i\delta_t)$ 内投资组合所持有的股票和债券的份额.

- 在 0 时刻给定期权的值为 15. 算出 ϕ_1 为 $(25-5)/(120-80) = 0.5$. 因此我们购买 0.5 份股票，花费 50，且在现金债券中借取 35.

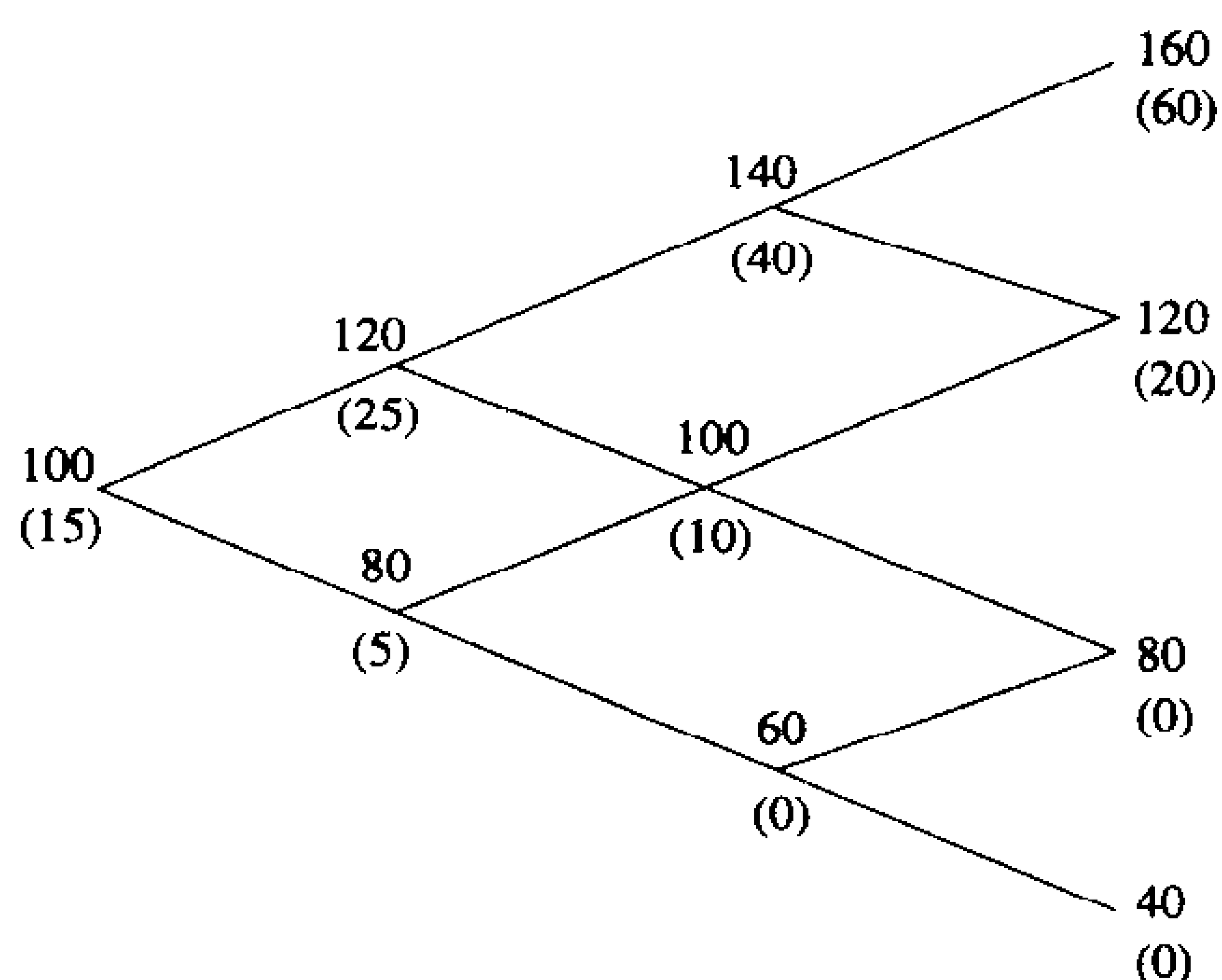


图 2-3: 例 2.1.2 中原生股票价格的树，括号中的数是每一个节点上权益的值

- 假设 $S_1 = 120$. 新的 ϕ 是 $(40-10)/(140-100) = 0.75$，因此我们再购买 0.25 份股票，需要借取的债券总额为 65.
- 假设 $S_2 = 140$. 现在 $\phi = (60-20)/(160-120) = 1$，因此我们还要购买更多的股票，使我们持有的股票的份额达到 1，而需要借取的债券总额为 100.
- 最后假设 $S_3 = 120$. 期权将是实值，因此我们必定拥有份额超过 100 的股票，那完全足够去抵消我们所借的债券.

[25] 下面的表格给出了股票价格遵循这棵树上另一条路径所持有的股票和债券.

时间 i	上次跳	股票价格S_i	期权值V_i	持有股票份额ϕ_i	持有债券份额ψ_i
0	--	100	15	--	--
1	下降	80	5	0.50	−35
2	上升	100	10	0.25	−15
3	下降	80	0	0.50	−40

注意所有的过程 $\{S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$，$\{V_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$，$\{\phi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$，$\{\psi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 依赖于上跳和下跳的顺序. 特别是，$\{\phi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 和 $\{\psi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 也是随机的. 我们不知道该组合在 0 时刻的情况，然而可以知道该组合是**自融资** (self-financing) 的. 我们在 $[i+1, i+2)$ 时段上所持有的投资组合可通过 (在 $i+1$ 时刻) 清算在 $[i, i+1)$ 时段所持有的组合所得的收益来购买，即这里不需要额外现金的流入. 而且在当前股价信息基础上我们知道如何在每一个时段上去调整投资组合. 这里是无风险的. □

在单时段两值模型中，我们看到在 T 时刻任何权益的值是可达的，且在零时刻它的值可以通过一个期望来表示. 在多时段情形下也同样如此 (见习

题 1). 证明任何权益是可达的证明就是在这棵树上通过逆向归纳的过程. 为了将期权定价公式用期望来表示，我们定义一个树的路径上的概率分布.

注意到逆向归纳论证在树的每一个分支上精确地规定了一个概率.对于股票价格遵循的树的每个路径，我们定义路径概率为包含该路径的分支上的概率的乘积.

路径概率

习题 2 要求证明通过逆向归纳得到的在 T 时刻的权益的值恰好是关于这些路径概率的收益的贴现期望值 (其中在每一个节点上贴现的权益按照以该节点为终点的所有路径的概率之和加权). 现在让我们用这个方法来验证一下前面的例子. 在例 2.1.2 的重组树中，总共有 8 条路径，一条以顶部节点为终点，一条以底部节点为终点，而以另外两个节点为终点的路径各有 3 条. 每个路径有相等的概率 1/8，因此权益的期望值为 $1/8 \times 60 + 3/8 \times 20 = 15$，这就是我们通过逆向归纳得到的值.

2.2 美式期权

稍微更复杂一点的市场模型足以让我们首先来考虑这样的期权，它的收益依赖于股票价格在时段 $[0,T]$ 内通过的路径. 在本节，我们主要关注这类期权中的最重要的例子：美式期权.

定义2.2.1(美式看涨和看跌期权) 一份到期日为 T 敲定价为 K 的美式看涨期权赋予持有人这样的权利但不负有义务，在 T 之前任何时刻以价格 K 去购买一份资产，但持有者没有义务一定要去执行.

同理，一份到期日为 T 敲定价为 K 的美式看跌期权赋予持有者这样的权利但不负有义务，在 T 之前任何时刻以价格 K 去出售一份资产.

显然美式期权的价值要比相应的欧式期权的价值更高 (或至少不低于). 问题是高多少?

26

首先来证明下面这个经常被引用的结论.

不支付红利的美式看涨期权

引理2.2.2 不支付红利的美式看涨期权在到期日之前任何时刻去执行都不是最明智的.

证 考虑下面两个投资组合.

- 组合 **A**：一份美式看涨期权加上在 t 时刻数量为 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金.
- 组合 **B**：一份股票.

记 S_t 为 t 时刻的股票价格，如果在 $t < T$ 时刻美式看涨期权被执行，则在 t 时刻组合 **A** 的值为 $S_t - K + Ke^{-r(T-t)} < S_t$. (显然期权仅在 $S_t > K$ 时

被执行). 组合 **B** 的值为 S_t . 另一方面在时刻 T，若期权被执行则组合 **A** 的值为 $\max\{S_T, K\}$ ，即它大于或等于组合 **B** 的价值.

我们已经证明了在到期日之前执行期权则给定的组合 **A** 的价值比组合 **B** 的价值小，但在到期日执行则给定的组合 **A** 的价值大于或等于组合 **B** 的价值，故提前执行是不明智的. □

这个结果仅对不支付红利的股票成立. 引理 2.2.2 的另外一种证明是习题 5 的方法. 在习题 7 中结论被推广到如果原生股票离散支付红利的情况，那么它仅在最后 T 时刻或在一个支付红利的时刻去执行才是明智的 (也可见习题 8). 更一般地，决定是否提前执行依赖于根据失去红利收入的“成本”.

不支付红利的美式看跌期权

美式看跌期权情况更复杂 (即使不支付红利). 我们用一个例子加以说明.

例2.2.3 *再次假定资产的价格依照图 2-3 中的重组树来演化. 为了解释这个模型，再假定无风险利率为零 (但是要看注释 2.2.4 的第 2 段). 一份敲定价为 100 的 3 个月的美式看跌期权的价值是多少?*

解 如同欧式期权的情形一样，我们也通过二项式树的逆向归纳的方法来求解.

- 期权在时刻 3 的价值从上到下分别为 0,0,20,60.
- 在时刻 2，我们必须考虑两种可能的情况：执行这份期权时的价值和不执行这份期权时的价值. 对于顶部节点是很容易的，不管哪种情况它的价值都为零. 对于第二个节点，由于股票的价格与敲定价相等，因此如果此时去执行这份期权则它的价值为零. 另一方面，如果不执行，那么由单时段两值模型的分析可知，期权的价值为在风险中性概率下期权在时刻 3 时的期望值. 我们已经计算出在树的每一个分支上的风险中性概率为 1/2 ，因此这个期望值是 10. 对于底部节点，不管是否执行期权的价值都为 40.
- 现在考虑时刻 1 上的两个节点. 对于上面一个节点，如果执行期权那么它的价值为零，然而如果继续持有该期权，那么再由单时段两值模型的分析可知此时它的价值为 5. 对于下面的节点，如果执行该期权则它的值为 20，否则为 25.
- 最后在 0 时刻，如果执行该期权则它的价值为零，否则它的价值就是 15.

27

期权的价格如图 2-4 所示.

□

注释2.2.4

1. 注意在上面例子中，在时刻 1 去执行该期权是不明智的，即使此时该

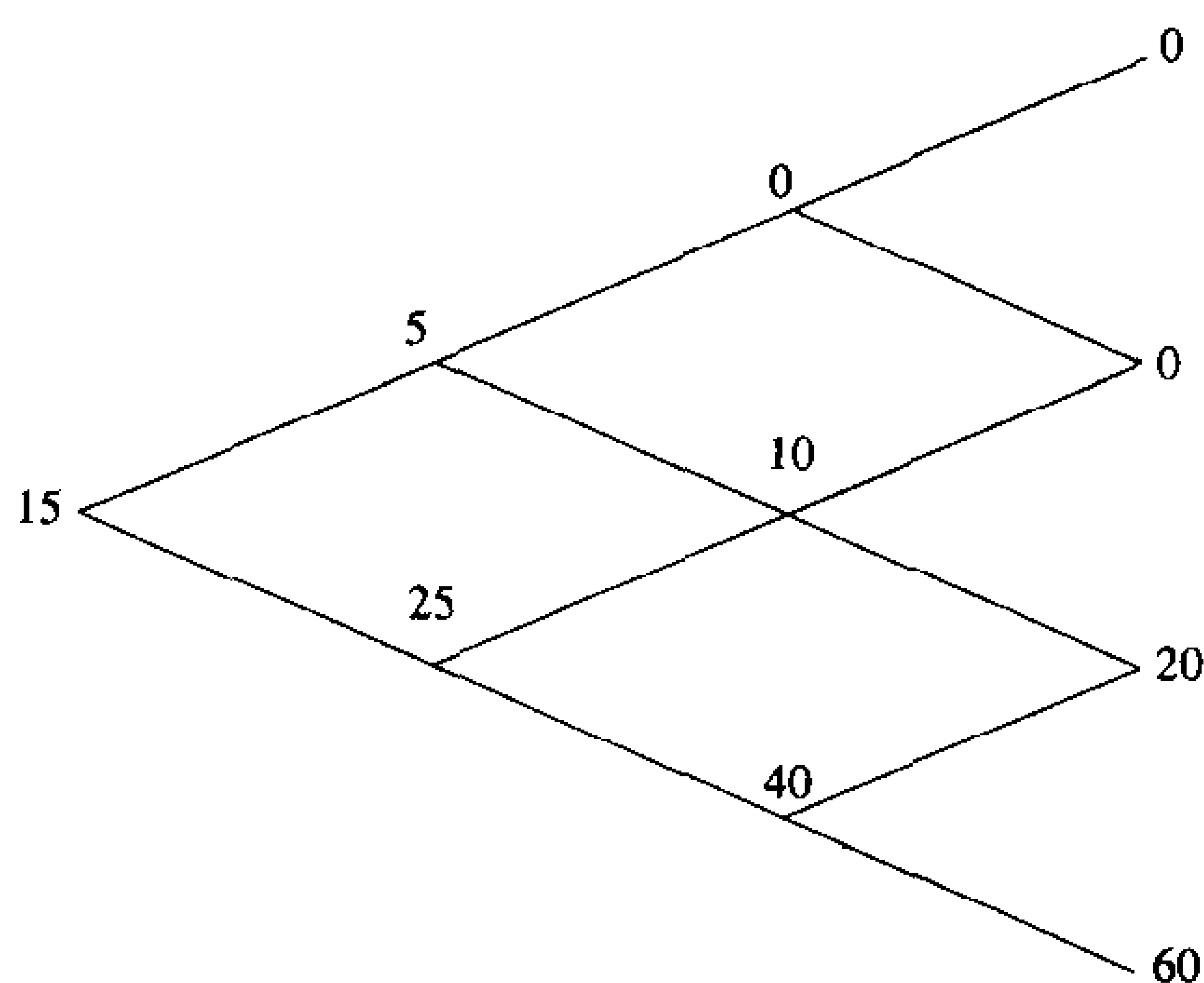


图 2-4: 例 2.2.3 的美式看跌期权的价值的演化过程

期权是“实值”. 若 $S_1 = 80$，那么通过立即执行可以获得 20，但是若继续持有则它的价值为 25.

2. 在这个例子中提前执行该期权永远都不会获得更多的收益，它至多也只与继续持有该期权时持平. 事实上若利率为零，那么情况如习题 6 中的一样. 对于利率不为零的情况，提前执行也可能是明智的，参见习题 9. □

2.3 离散参数鞅和马尔可夫过程

多时段的股票市场模型看上去仍然是相当特殊的. 为了给下一章的连续情形作铺垫，我们现在把它放在离散参数鞅和马尔可夫过程的更一般的框架中.

首先，我们来回顾一下随机变量和随机过程的概念.

[28] 随机变量

形式上，当我们讨论一个随机变量时首先要给定一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其中样本空间 (sample space)$\Omega$ 是一个集合，$\mathcal{F}$ 是由 Ω 和事件的所有子集构成的，$\mathbb{P}$ 表示每个事件 $A \in \mathcal{F}$ 的概率. 集合 $\mathcal{F}$ 是个 σ - 域，即 $\Omega \in \mathcal{F}$，且在可数集的运算和取完备下 $\mathcal{F}$ 是闭的. 概率 $\mathbb{P}$ 必须要满足通常的概率公理(axioms of probabilly).

- $0 \leqslant \mathbb{P}[A] \leqslant 1, \forall A \in \mathcal{F}$，
- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$，
- $\mathbb{P}[A \bigcup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$，$A, B \in \mathcal{F}$ 且不相交.
- 若 $A_n \in \mathcal{F}$，$\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$，则当 $n \uparrow \infty$ 时，$\mathbb{P}[A_n] \uparrow \mathbb{P}[\bigcup_n A_n]$.

定义2.3.1 一个实值随机变量X在 $\mathcal{F}$ - 可测的 Ω 上是一个实值函数. 在一个离散的随机变量的情形中 (即随机变量只能在可数的许多不同的值中取值) 这可以简单地表示为

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F},$$

因此 $\mathbb{P}$ 表示事件 $\{X = x\}$ 的概率. 对于一般实值随机变量，要求

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F},$$

因此我们可以定义分布函数，$F(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x]$.

29 讨论这个相对简单的概念看上去显得相当复杂. 从技巧上需要这样，因为在所有的 Ω 的子集上以非平凡的方式定义 $\mathbb{P}$ 是不可能的. 但是如果我们忽略这些技巧上的细节，在大多数情况下也不会差的太多. 然而当我们开始研究随机过程和与时间相关的随机变量时，在一个稍微更正式的框架中去考虑就变得更为自然了.

随机过程

为了规定一个 (离散时间) 随机过程，我们需要的不仅仅是单个的 σ - 域 $\mathcal{F}$，而是它们的一个递增序列 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$. 集合 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 称作一个σ - **域流**(filtration)，且四元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ 称作过滤概率空间 (filtered probability space).

定义2.3.2 一个实值随机过程就是 Ω 上的一个实值函数序列 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$，如果 X_n 对于每个 n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，我们就称对于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, 它是适应的.

那么可以考虑把 σ- 域 $\mathcal{F}_n$ 作为对到时刻 n 的随机过程的演化的所有信息的编译. 也就是，若知道在 $\mathcal{F}_n$ 中每个事件是否发生，那么就可以推断出遵循到时刻 n 的随机过程的路径. 我们将称精确编译这些信息的 σ - 域流为与随机过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 相关的自然σ - 域流.

存在一个已经建立了的非常正式的方法的重要结论. 注意到我们已经把过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 定义为与 $\mathbb{P}$ 无关的 Ω 上的一个可测函数的序列. 这完全类似于我们给出的树的模型中的情形. 对于给定的函数 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 我们指定股票的价格在 n 时刻可能取的值，然后叠加概率. 即使我们能预想到向上和向下跳的概率可能是多少，但是为了实际上给权益定价仍要改变概率 (对于风险中性概率). 对于期权定价方法来说改变概率的过程是基本的，即使在最复杂的市场模型中也是如此.

条件期望

当在通过两叉 (或二项式) 树的路径上构造概率时，首先要在树的每个分支上给定概率. 以这种方法来做到：它要使在 $k\delta t$ 时刻股票价格已知为 S_k 时，给定的 $\mathrm{e}^{-r\delta t}S_{k+1}$ 的期望值正好就是 S_k . 这个条件给定了在对应于从 $k\delta t$ 时刻股票的值为 S_k 的节点出发的两个分支上的概率. 我们应该推广这种思

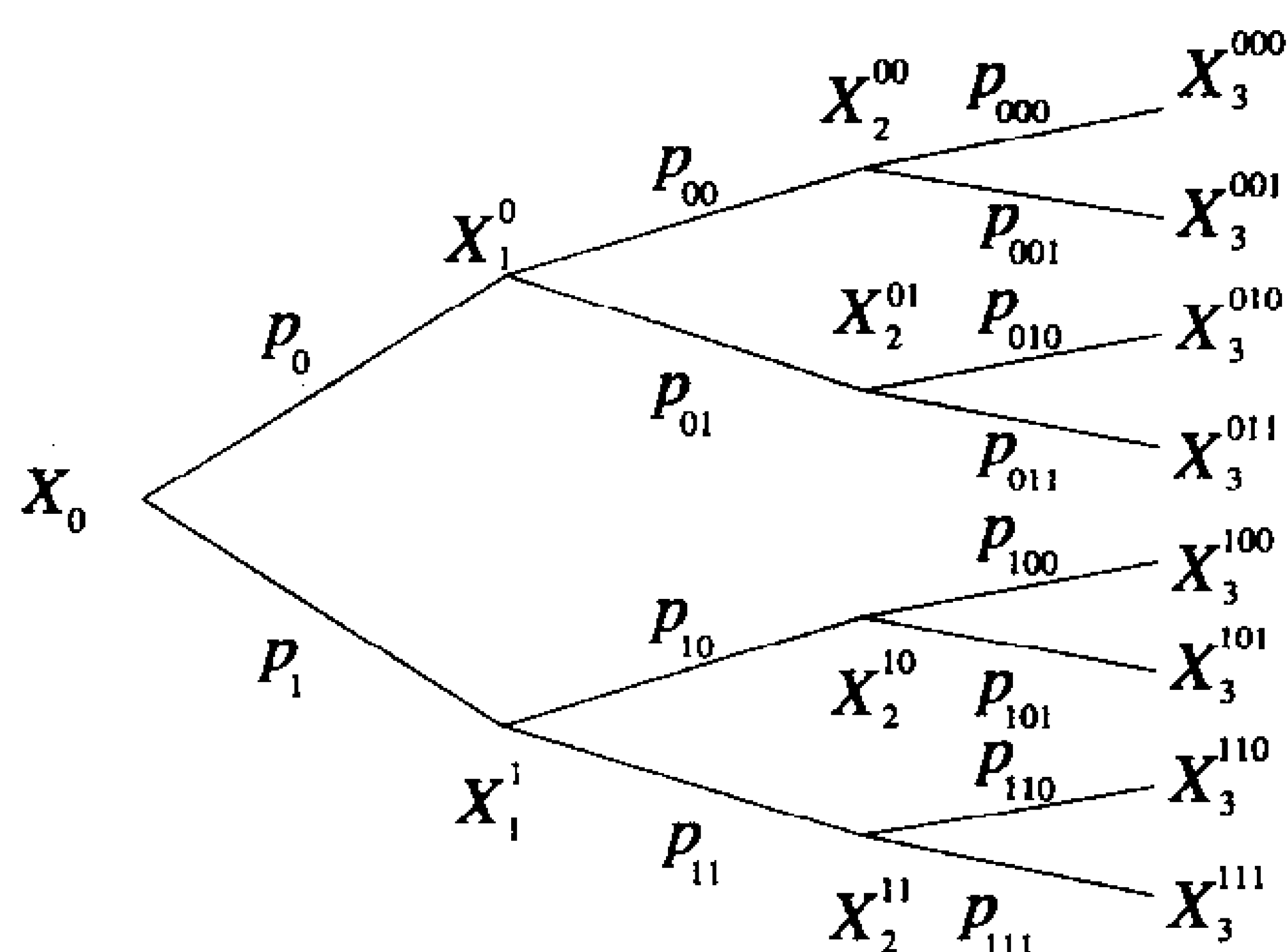


图 2-5: 与例 2.3.3 的随机过程相应的树和它的分布

想，但首先要回顾一下条件期望 (conditional expectation). 通过下面的例子可以给最好的解释.

例2.3.3 *考虑图 2-5 中的树所表示的随机过程. 它的分布由树的分支上的概率给定，这里与 2.1 节中一样，假定通过这棵树的一条特殊路径的概率是包含该路径的各分支概率的乘积.*

计算 在树上明确地给定了 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$, 且对于给定的 Ω, 隐含地给定了 $\mathbb{P}$. 在后面的例子中我们将不再去死搬硬套，但是在这还是要明确地写出 Ω . 有很多种可能的选择，但是一个明显的选择就是上跳和下跳的所有可能序列的集合. 若 $\omega=(u,u,d)$, 那么我们说 $X_1(\omega)=X_1^0$, $X_2(\omega)=X_2^{00}$, $X_3(\omega)=X_3^{001}$. [30]

首先来计算条件期望

$$\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_1].$$

由于我们把 $\mathcal{F}_n$ 看作"到时刻 n 为止的所有信息"，因此我们的问题是在给出了到时刻 1 的所有信息的情况下求 X_3 的条件期望. 注意到正在计算的是一个 $\mathcal{F}_1$- 可测的随机变量， 它仅仅依赖于直到时刻 1 才发生的事件. 这里只有两种可能：第一次跳是向上的或第一次跳是向下的.

- 如果第一次跳是向上的，那么 X_3 可能的值为 X_3^{000} ,X_3^{001},X_3^{010} 和 X_3^{011}. 每个值的概率由路径概率决定，但限于那些要由时刻 1 上面的节点引出的路径. 那么条件期望取值为

  $$\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_1](u)=p_{00}p_{000}X_3^{000}+p_{00}p_{001}X_3^{001}+p_{01}p_{010}X_3^{010}+p_{01}p_{011}X_3^{011}.$$

  第一次跳向上的概率记为 p_0.
- 若第一次跳是向下的，发生的概率记为 p_1，那么条件期望取值为

  $$\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_1](d)=p_{10}p_{100}X_3^{100}+p_{10}p_{101}X_3^{101}+p_{11}p_{110}X_3^{110}+p_{11}p_{111}X_3^{111}.$$

同理，可以计算 $\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]$，此随机变量是 $\mathcal{F}_2$- 可测的，即它的值依赖于这个过程的前两次跳. 它的分布如下表所示.

值	概率
$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_2](uu) = p_{000}X_3^{000} + p_{001}X_3^{001}$	p_0p_{00}
$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_2](ud) = p_{010}X_3^{010} + p_{011}X_3^{011}$	p_0p_{01}
$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_2](du) = p_{100}X_3^{100} + p_{101}X_3^{101}$	p_1p_{10}
$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_2](dd) = p_{110}X_3^{110} + p_{111}X_3^{111}$	p_1p_{11}

31

当然，由于 $\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]$ 是个 $\mathcal{F}_2$- 可测的随机变量，且 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$，因此我们可以计算条件期望

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1].$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1](u) &= p_{00}\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2](uu) + p_{01}\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2](ud),\\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1](d) &= p_{10}\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2](du) + p_{11}\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2](dd).\end{aligned}$$

将上述表格中 $\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]$ 的值代入，易验证可得

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X_3|\mathcal{F}_1]. \tag{2.1}$$

□

下面是条件期望的定义.

定义2.3.4（条件期望） 假设 X 是个 $\mathcal{F}$ - 可测的随机变量，并且 $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. 假设 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 是 σ - 域，那么给定 $\mathcal{G}$ 的 X 的条件期望是 $\mathcal{G}$- 可测的随机变量. 记作 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$，对于任意的 $A \in \mathcal{G}$，它有性质

$$\mathbb{E}[[X|\mathcal{G}];A] \triangleq \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \mathbb{E}[X;A].$$

条件期望存在，但只有对于以概率 1 取值为零的随机变量才是惟一的. 这个技巧在第 3 章的习题 17 中是很重要的.

等式 (2.1) 是下面条件期望的重要性质的一个特殊情况.

条件期望的塔(tower)性质：假定 $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$；那么

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_j]|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i].$$

总之这就是说，先取到时刻 j 的信息上的条件期望，然后再取到前面时刻 i 的信息上的条件期望，这个期望值与一开始取到时刻 i 的期望值是一样的.

□

在利用条件期望来计算时，记住下面的事实常常是有用的. 32

取出条件期望中的已知项： 假定 $\mathbb{E}[X] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[XY] < \infty$, 那么

$$\text{若}Y\text{是}\mathcal{F}_n\text{ - 可测的,}\qquad \mathbb{E}[XY|\mathcal{F}_n] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n].$$

这就是说，若到 n 时刻 Y 是已知的，则取到时刻 n 的条件期望就可以把 Y 当作一个常数来处理. □

鞅性质

由于选定了在 2.1 节中用来定价权益的树上的概率测度，因此如果定义 $\{\tilde{S}_k\}_{k\geqslant 0}$ 为贴现的股票价格，即 $\tilde{S}_k = e^{-kr\delta t}S_k$ ，那么对于已知的 $\tilde{S}_k$，$\tilde{S}_{k+1}$ 的期望值恰好就是 $\tilde{S}_k$. 记为

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_{k+1}|\tilde{S}_k] = \tilde{S}_k.$$

因为在我们的模型中股票价格是“无记忆的”，以致股票在下一时刻的运动不受它到达当前值的路径的影响， 取已知 $\tilde{S}_k$ 上的条件期望实际上与取已知所有的 $\mathcal{F}_k$ 上的期望是一样的，因此

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \tilde{S}_k. \tag{2.2}$$

性质 (2.2) 是一个非常重要的性质.

定义2.3.5 假设 $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个过滤概率空间. 随机变量序列 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个关于 $\mathbb{P}$ 和 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的鞅，如果

$$\mathbb{E}[|X_n|] < \infty,\quad \forall n, \tag{2.3}$$

且

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n,\quad \forall n. \tag{2.4}$$

若把 (2.4) 写成

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant X_n,\quad \forall n,$$

那么 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 上鞅. 相反地，若把它写成

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant X_n,\quad \forall n,$$

那么 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$- 下鞅.

这些定义是不完善的. 有许多过程不属于这里的任何一种情况. 鞅经常被认为是在参与一场连续的公平竞争后追踪获得的净利. 在这个上鞅模型中净利是从不利的 (输的可能性大于赢的可能性) 竞争中获得的，而下鞅是从有利的竞争中获得净利.

实际上鞅的概念是 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅的概念，记住这一点相当重要. 回顾我们定义的随机过程，它与序列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$，$\Omega$ 上的 $\mathcal{F}$- 可测函数 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 以

及定义在 $\mathcal{F}$ 的元素上的概率测度 $\mathbb{P}$ 的作用无关. 在 2.1 节中，我们对市场的认识或许是贴现的股票价格不是鞅 (确实它可能不是或者没有人能在股票上投机，即通过购买现金债券得到同样的钱和无风险利率). 为了定价和对冲的（我们将看到）需要，我们变换概率测度以使贴现的股票价格成为一个鞅. 我们将把代表市场观点的概率测度称为*市场测度* (market measure). 这种用来定价和对冲的新的概率测度称为*等价鞅测度* (equivalent martingale measure).

注释 (由 $\mathbb{N}$ 的子集导出的鞅) 尽管已经定义了由 $n \in \mathbb{N}$ 导出的鞅，但我们还将经常讨论由 $\{0 \leqslant n \leqslant N\}$ 导出的鞅. 这种鞅是通过把条件 (2.3) 和 (2.4) 限制在 $\{0 \leqslant n \leqslant N\}$ 来定义的. 将陈述由 $\{n \geqslant 0\}$ 导出的鞅的一些重要结论; 它们用显然的方式加以修改就可以应用到由 $\{0 \leqslant n \leqslant N\}$ 导出的鞅上. □

33

下面这种情况经常是有用的，由塔性质，若 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅，那么对于 $i < j$，有

$$\mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_i] = X_i.$$

马尔可夫性质

如果鞅有另外一个性质即马尔可夫性质，那么这个计算可能也是简单的.

定义2.3.6(马尔可夫过程) 随机过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$(有自然 σ - 域流，$\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$) 是一个离散时间马尔可夫过程，如果

$$\mathbb{P}[X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} \in B|X_n],$$

对于所有的 $B \in \mathcal{F}$ 成立.

总之，给定到时刻 n 的过程的整个历史的条件下 $X_{n+1} \in B$ 的概率，与只给定 X_n 的值的条件下 $X_{n+1} \in B$ 的概率是相同的. 马尔可夫过程无记忆. 许多鞅的例子 (和所有的市场模型的例子) 也有马尔可夫性质. 然而，不是所有的鞅都是马尔可夫过程，反之不是所有的马尔可夫过程都是鞅 (见习题 11) .

记号：当希望去强调某一 σ - 域流是由随机过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ "生成的"，那么用记号 $\{\mathcal{F}_n^X\}_{n\geqslant 0}$.

除非有其他的规定, 一般地 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 总是被理解为与正在考虑的随机过程有关的自然 σ - 域流.

若总是坚持给 Ω 一个明确的规定可能过于生搬硬套，因此，一般地我们不这样做. 我们仍用 "$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$ - 鞅" 来表示 "$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}^X)$ - 鞅" .

例子

例2.3.7(随机游动) 一维简单的随机游动 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个马尔可夫过程，满足 $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$，其中 (对每个 n) 有 $\xi_n \in \{-1, +1\}$，而且在 $\mathbb{P}$ 下，$\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 是独立同分布的随机变量. 因此

$$\mathbb{P}[S_{n+1} = k+1|S_n = k] = p, \qquad \mathbb{P}[S_{n+1} = k-1|S_n = k] = 1-p,$$

其中 $p \in [0,1]$.

如果 $p = 0.5$, 那么 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$ - 鞅. 若 $p < 0.5$ ($p > 0.5$), 那么 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$ - 上鞅 ($\mathbb{P}$- 下鞅) .

验证 为验证以上结论，时刻 n 的随机游动距离其起始点至多为 n, 显然期望 $\mathbb{E}[|S_n|] < \infty$ 是有限的. 而且 34

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= S_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}],\end{aligned}$$

这里利用了最后一行中 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 的独立性. 则足以观察到

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}]\begin{cases} < 0, & p < 0.5, \\ = 0, & p = 0.5, \\ > 0, & p > 0.5. \end{cases}$$ □

例2.3.8 (权益的条件期望) 假设给定 Ω 和一个 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. (在本例中我们认为 $\mathcal{F}_n$ 编译了到时刻 $n\delta t$ 为止的金融市场的历史.) 记 C_N 为任一有界的 $\mathcal{F}_n$ - 可测的随机变量. (在 $N\delta t$ 时刻把它看作一个权益). 那么对于概率测度 $\mathbb{P}$, 条件期望过程 $\{X_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为

$$X_n = \mathbb{E}[C_N|\mathcal{F}_n],$$

它是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N})$ - 鞅.

例2.3.9 (权益的贴现价格) 在求解欧式期权的定价问题中，该期权在 2.1 节中的股票价格的多时段两值模型中在到期时刻 $N\delta t$ 的值为 C_N ，我们建立了一个概率测度，记为 $\mathbb{Q}$, 在该测度下贴现的股票价格是一个鞅. 对于任何在 $N\delta t$ 时刻的权益为 C_N 假如 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|C_N|] < \infty$ ，那么在 $N\delta t$ 时刻收益为 C_N 的期权在 $n\delta t$ 时刻的公平价格应是

$$V_n = \mathrm{e}^{-r(N-n)\delta t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_N|\mathcal{F}_n].$$

用 $\tilde{V}_n = \mathrm{e}^{-rn\delta t}V_n$ 来定义贴现的权益过程， 那么 $\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是个 $\mathbb{Q}$ - 鞅. 假定一开始就知道在整个时段 $[i\delta t, (i+1)\delta t)$ 内的无风险利率，那么即使去掉利率是常数的假设它仍然成立.

上例说明了欧式期权的贴现价格过程是个鞅.换句话说, 复制的投资组合的贴现价值是鞅. 如前，记 (ϕ_n, ψ_n) 为在第 n 个时段 $[(n-1)\delta t, n\delta t)$ 上复制投资组合中所持有的股票和债券份额. 那么这个组合在 $n\delta t$ 时刻的值为

相对于旧鞅的新鞅

$$V_n = \phi_{n+1}S_n + \psi_{n+1}B_n,$$

其中 B_n 是 $n\delta t$ 时刻现金债券的价值. 该投资组合是自融资(self-financing) 的，即在 $(n+1)\delta t$ 时刻构造新的投资组合所需的费用可完全通过出售在 $[n\delta t,(n+1)\delta t)$ 时段上所持有的投资组合而来的. 用记号表示为

[35]

$$\phi_{n+1}S_{n+1}+\psi_{n+1}B_{n+1}=\phi_{n+2}S_{n+1}+\psi_{n+2}B_{n+1}.$$

贴现价格为

$$\tilde{V}_n=\phi_{n+1}\tilde{S}_n+\psi_{n+1},$$

因此，由自融资的性质

$$\phi_{n+1}\tilde{S}_{n+1}+\psi_{n+1}=\phi_{n+2}\tilde{S}_{n+1}+\psi_{n+2},$$

故有

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n+1}-\tilde{V}_n &= \phi_{n+2}\tilde{S}_{n+1}+\psi_{n+2}-\phi_{n+1}\tilde{S}_n-\psi_{n+1}\\ &= \phi_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}-\tilde{S}_n).\end{aligned}$$

即

$$\tilde{V}_n=V_0+\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{j+1}(\tilde{S}_{j+1}-\tilde{S}_j). \tag{2.5}$$

由前面的注释可知，$\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅，因此我们已经验证了在概率测度 $\mathbb{Q}$ 下 $\{\tilde{S}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个鞅，等式 (2.5) 右边的表达式也是鞅. 这是很正常的现象. 为了表述一个精确的结论我们需要一个定义. 回顾在 $(i-1)\delta t$ 时刻已知的 ϕ_i .

定义2.3.10 给定 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$，若对于所有的 $n\geqslant 1$，A_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ - 可测的，则过程 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$- 可预见的或 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$- 可料的.

注意这是现金债券所允许的一类随机性.

离散随机积分

命题2.3.11 假设 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是相适应的，且 $\{\phi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$- 可料的. 定义

$$Z_n=Z_0+\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{j+1}(X_{j+1}-X_j). \tag{2.6}$$

其中 Z_0 是一个常数.

若 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅，那么 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ 也是 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$- 鞅.

[36]

注释 如果$\{\theta_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是相适应的，则由 $\phi_n=\theta_{n-1}$ 定义的过程 $\{\phi_n\}_{n\geqslant 1}$ 可料. 因此对于一个与 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 相适应的过程 $\{\theta_n\}_{n\geqslant 0}$，若 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$- 鞅，那么

$$Z_n=Z_0+\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(X_{j+1}-X_j).$$

也是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅. □

命题2.3.11的证明 这是一个利用条件期望的习题.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]-Z_n &= \mathbb{E}[Z_{n+1}-Z_n|\mathcal{F}_n]\\
&= \mathbb{E}[\phi_{n+1}(X_{n+1}-X_n)|\mathcal{F}_n]\\
&= \phi_{n+1}\mathbb{E}[(X_{n+1}-X_n)|\mathcal{F}_n]\\
&= \phi_{n+1}(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]-X_n)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

我们可以考虑把等式 (2.6) 中的和看作一个离散的随机积分 (discrete stochastic integral). 当我们转到第 4 章的随机积分时，实质上就是对这种形式和式取极限.

不是只有二项式树模型能够组合成鞅的框架. 支持单时段转换到多时段两叉模型的论断同样可以允许我们把 1.5 节和 1.6 节中单时段模型转换成多时段模型. 我们现在用这种语言来重新表述定理 1.5.2 和 1.6.2. 假定市场由 K 种股票构成，且股票价格 $S^1,\cdots,S^K$ 在 $\delta t,2\delta t,3\delta t,\cdots,N\delta t=T$ 时刻的可能值是已知的. 用 Ω 来表示股票价格向量遵循 $\mathbb{R}_+^K$ 中的所有可能“路径”的集合.

资产定价基本定理

定理 1.5.2 告诉我们，市场无套利等价于在 Ω 上存在一个对于每个 $\omega\in\Omega$ 都严格取正的概率测度 $\mathbb{Q}$，并使得

$$S_{r-1}=\psi_0^{(r)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_r|S_{r-1}],$$

其中 S_r 是股票价格在 r 时刻的向量，$\psi_0^{(r)}$ 是在 $[(r-1)\delta t,r\delta t]$ 上的无风险借贷的贴现.

如果像上面一样，我们考虑由 $\tilde{S}_j=\prod_{i=1}^{j}\psi_0^{(i)}S_j$ 给定的贴现的股票价格 $\{\tilde{S}_j\}_{0\leqslant j\leqslant N}$, 那么下式成立:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_r|\tilde{S}_1,\cdots,\tilde{S}_{r-1}]=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_r|\mathcal{F}_{r-1}]=\tilde{S}_{r-1}.$$

换句话说，贴现的股票价格向量是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅.

定义2.3.12 称空间 Ω 上的两个概率测度 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是等价的，若对于所有的事件 $A\subseteq\Omega$

$$\mathbb{Q}(A)=0 \quad 当且仅当\ \mathbb{P}(A)=0.$$

那么，假定有这样一个市场模型，在这个模型中股票价格向量遵循遍及 $\mathbb{R}_+^K$ 的有限条路径 Ω 中的一条. 我们甚至可用自己的话来描述在 Ω 上价格如何在概率测度 $\mathbb{P}$ 中演化和被编译的. 定理 1.5.2 和定理 1.6.2 合起来就是:

定理2.3.13 对如上所述的多时段市场模型，市场无套利当且仅当存在一个等价鞅测度 $\mathbb{Q}$. 即存在一个等价于 $\mathbb{P}$ 的测度 $\mathbb{Q}$，使得贴现的股票价格过程是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅.

在该情形下, 可达权益 C_N(在 $N\delta t$ 时刻执行) 在零时刻的市场价格是惟一的，并且为，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi_0 C_N],$$

其中 $\psi_0 = \prod_1^N \psi_0^{(i)}$ 是在 N 时段上的贴现因子.

尽管存在其他技术条件，但对于连续时间的市场模型，这个基本定理本质上有完全一致的表述.

2.4 某些重要的鞅定理

在鞅的框架下，表达每一件事情需要很多有用的定理. 在本节就给出了一些在离散参数鞅的理论中非常重要的结论. 然而，我们这里只是粗略地进行一些必要的论述. 更详实的论证参见 Williams(1991).

停时

鞅理论中一个最重要的计算工具是可选停止定理. 在表述这个定理之前先介绍停时的定义.

定义2.4.1 给定一个与 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 相匹配的样本空间 Ω，一个停时或最优时间是一个随机变量 $T:\Omega \to \mathbb{Z}_+$，具有性质

$$\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad \forall n \geqslant 0.$$

这就是说, 我们在 n 时刻及以前获得的信息的基础上就可决定是否 $T \leqslant n$, 即不必考虑未来的情况.

例2.4.2 考虑例 2.3.7 中的简单的随机游动. T 定义为随机游动取值为 1 的首达时间，即

$$T = \inf\{i \geqslant 0 : S_i = 1\};$$

那么 T 是一个停时.

另一方面

$$U = \sup\{i \geqslant 0 : S_i = 1\}$$

不是一个停时.

可选停止

38

停时的一个等价定义是： 对于 $n \geqslant 0$, 随机变量 $\theta_n \triangleq \mathbf{1}_{\{T\geqslant n+1\}}$ 是相适应的 (见定义 2.3.2). 因此，根据命题 2.3.11 后面的注释可知，若 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个鞅,那么下面的过程

$$Z_n \triangleq \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (X_{j+1} - X_j). \tag{2.7}$$

也是一个鞅, 上式重新整理得

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (X_{j+1} - X_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{T \geqslant j+1\}} (X_{j+1} - X_j) \\ &= X_{T \wedge n} - X_0, \end{aligned}$$

其中 $T \wedge n$ 表示 T 和 n 的最小值.

定理2.4.3(可选停止定理) 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ 是一个过滤概率空间. 假设过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅, 且 T 是一个有界停时, 那么

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_0] = X_0,$$

因此

$$\mathbb{E}[X_T] = X_0.$$

证 这个证明是一个我们上面已经做过的计算的简单应用. 如果知道 $T \leqslant N$, 那么在 (2.7) 的记号中, $Z_N = X_T - X_0$, 且由于 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个鞅, 所以 $\mathbb{E}[Z_N | \mathcal{F}_0] = Z_0 = 0$, 即

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_0] = X_0.$$

再次取期望得

$$\mathbb{E}[X_T] = X_0. \qquad \square$$

在这个结论中, 关键之处在于停时是有界的. 实际上在所有的金融应用中都将是这种情况, 但习题 15 显示了什么地方可能出问题. 这个定理更一般地描述是可行的, 见 Williams (1991). 这里可用一个具体的应用来验证定理的正确性 (也可参见习题 14).

命题2.4.4 令 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是例 2.3.7 中的 (非对称的) 简单随机游动, 且 $p > 1/2$. 对 $x \in \mathbb{Z}$, 记 [39]

$$T_x = \inf\{n : S_n = x\},$$

且定义

$$\phi(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

那么对于 $a<0<b$,

$$\mathbb{P}[T_a<T_b]=\frac{1-\phi(b)}{\phi(a)-\phi(b)}.$$

证 首先证明 $\{\phi(S_n)\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅. 由于游动在一个时刻只能取一步，因此 $-n\leqslant S_n\leqslant n$. 又由于对于 $p>1/2$ 有 $0<(1-p)/p<1$，则显然有

$$\mathbb{E}[|\phi(S_n)|]<\infty,\qquad \forall n.$$

验证在条件期望中确实有个鞅则是另一个问题. 我们必须计算

$$\mathbb{E}[\phi(S_{n+1})|\mathcal{F}_n].$$

回顾 $S_{n+1}=\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j=S_n+\xi_{n+1}$，其中在 $\mathbb{P}$ 下随机变量 ξ_j 是独立同分布的，且

$$\mathbb{P}[\xi_j=1]=p,\qquad \mathbb{P}[\xi_j=-1]=1-p.$$

则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(S_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\phi(S_n)\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{\xi_{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \phi(S_n)\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{\xi_{n+1}}\right]\\ &= \phi(S_n)\left(p\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{1}+(1-p)\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{-1}\right)\\ &= \phi(S_n).\end{aligned}$$

现在我们应该把可选停止定理应用到停时 $T=T_a\wedge T_b$ 上，游动触及到 a 或 b 的首达时间. 困难之处在于 T 不是有界的, 因此，对于任意的 (确定的)N，把这个定理应用到停时 $T\wedge N$ 上， 则可得

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{E}[\phi(S_0)]=\mathbb{E}[\phi(S_{T\wedge N})]\\ &= \phi(a)\mathbb{P}[S_T=a,T\leqslant N]+\phi(b)\mathbb{P}[S_T=b,T\leqslant N]+\mathbb{E}[\phi(S_N),T>N].\end{aligned}\tag{2.8}$$

现在

$$\begin{aligned}0\leqslant \mathbb{E}[\phi(S_N),T>N] &= \mathbb{E}[\phi(S_N)|T>N]\mathbb{P}[T>N]\\ &\leqslant \left[\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^{b}+\left(\tfrac{p}{1-p}\right)^{a}\right]\mathbb{P}[T>N],\end{aligned}$$

[40] 由于 $N\to\infty$ 时，$\mathbb{P}[T>N]\to 0$，那么在 (2.8) 中令 $N\to\infty$, 可得

$$\phi(a)\mathbb{P}[S_T=a]+\phi(b)\mathbb{P}[S_T=b]=1.\tag{2.9}$$

最后，由于 $\mathbb{P}[S_T=a]=1-\mathbb{P}[S_T=b]$，且 $\mathbb{P}[T_a<T_b]=\mathbb{P}[S_T=a]$, 则等式 (2.9) 变为

$$\phi(a)\mathbb{P}[T_a<T_b]+\phi(b)(1-\mathbb{P}[T_a<T_b])=1.$$

整理得

$$\mathbb{P}[T_a < T_b] = \frac{1-\phi(b)}{\phi(a)-\phi(b)},$$

命题成立. □

经常可从不完全的信息中推导出关于鞅的许多结论. 一个例子就是习题 12 的结论，此例子说一个可料的鞅是常数. 另一个例子可由下面的结论得出.

收敛定理

定理2.4.5(正上鞅收敛定理) 如果 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 上鞅，且对于所有 n 有 $X_n \geqslant 0$, 那么存在一个 $\mathcal{F}_\infty$ - 可测的随机变量 X_∞, 并且 $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$，使得

$$X_n \to X_\infty, \qquad 当 n \to \infty 时,$$

以 $\mathbb{P}$ 概率 1 成立.

这个结论的证明超出了我们这里叙述的范围，但可参见 Williams(1991).

补偿

在回到金融问题之前，我们再来看一个结论. 回顾可知，一般来说下鞅趋于上升，而上鞅趋于下降. 下面的结论有时称作补偿 (compensation)，即可从一个下鞅减去一个非减过程得到一个鞅，而且也可以对一个上鞅加上一个非减过程得到一个鞅. 在这两种情况中，有趣的事情是这个非减过程是可料的.

命题2.4.6

1. 假设 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$- 下鞅，那么存在一个可料的非减过程 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$, 使得 $\{X_n - A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅. 若令 $A_0 = 0$, 则 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是惟一的.

2. 假设 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 上鞅，那么存在一个可料的非减过程 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$，使得 $\{X_n + A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅. 若令 $A_0 = 0$, 则 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是惟一的.

证 这两部分的证明本质上是一样的，因此我们只考虑第一种情况. [41]

定义 $A_0 = 0$ 且对于 $n \geqslant 1$ 令

$$A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}].$$

由定义 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是可料的且是非减的 (由于 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个下鞅). 我们必须验证 $\{X_n - A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个鞅. 首先来验证对于所有的 n，$\mathbb{E}[|X_n - A_n|] < \infty$ 成

立.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n-A_n|] &\leqslant \mathbb{E}[|X_n|]+\mathbb{E}[A_n]\\
&= \mathbb{E}[|X_n|]+\mathbb{E}\left[A_0+\sum_{j=1}^{n}(A_j-A_{j-1})\right]\\
&= \mathbb{E}[|X_n|]+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_j-X_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}]] \quad (\text{由}A_j\text{的定义})\\
&\leqslant \mathbb{E}[|X_n|]+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_j|+|X_{j-1}||\mathcal{F}_{j-1}]]\\
&= \mathbb{E}[|X_n|]+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[|X_j|+|X_{j-1}|] \quad (\text{塔性质})
\end{aligned}$$

由于假定对于所有 j 有 $\mathbb{E}[|X_j|]<\infty$，那么显然最后的表达式是有限的.

现在来验证鞅的性质，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X_{n+1}-A_{n+1}|\mathcal{F}_n]\\
&=\mathbb{E}[X_{n+1}-\mathbb{E}[X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n]-A_n|\mathcal{F}_n] \ (\text{由}A_{n+1}\text{的定义})\\
&=\mathbb{E}[X_{n+1}-X_{n+1}+X_n-A_n|\mathcal{F}_n]\\
&=X_n-A_n.
\end{aligned}$$

剩下的是要去验证当 $A_0=0$ 时过程 $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ 是惟一的. 假设存在另一个有同样性质的可料过程 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$，那么 $\{X_n-A_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 $\{X_n-B_n\}_{n\geqslant 0}$ 都是鞅，因此它们的差 $\{A_n-B_n\}_{n\geqslant 0}$ 也是鞅. 另一方面，$\{A_n-B_n\}_{n\geqslant 0}$ 是可料的，且可料的鞅是个常数(见习题 12). 由于 $A_0=0=B_0$，故证明完成. □

美式期权和上鞅

让我们来看看在具体的金融例子中这些概念的意义是什么.

例2.4.7(修正的美式期权) 假设模型为二项式树模型且采用 2.2 节中的记号，令 Ω 为树上的概率测度，在该测度下贴现的股票价格 $\{\tilde{S}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个鞅. 记 $\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为敲定价格为 K，到期日为 $T=N\delta t$ 的美式看涨或看跌期权的贴现值，且定义

[42]

$$\tilde{B}_n=\begin{cases} e^{-n\delta t}(S_n-K)_+, & \text{看涨情形},\\ e^{-n\delta t}(K-S_n)_+, & \text{看跌情形}.\end{cases}$$

(σ - 域流总是由 $\{S_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 生成.) 那么 $\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是控制 $\{\tilde{B}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 的最小的 $\mathbb{Q}$ - 上鞅.

在习题 16 中可以看到，这个特征还可为引理 2.2.2 的证明提供另一个简单的证法.

解释 由 2.2 节可知

$$\tilde{V}_{n-1}=\max\left\{\tilde{B}_{n-1},\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_n\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right]\right\},\quad 0\leqslant n\leqslant N,$$

且 $\tilde{V}_N = \tilde{B}_N$. 显然，$\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个控制 $\{\tilde{B}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 的上鞅. 为了验证它是具有该性质的最小上鞅，假定 $\{\tilde{U}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是控制 $\{\tilde{B}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 的另一个任意上鞅. 那么 $\tilde{U}_N \geqslant \tilde{V}_N$，且若 $\tilde{U}_N \geqslant \tilde{V}_n$，那么

$$\tilde{U}_{n-1} \geqslant \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{U}_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \geqslant \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right],$$

因此

$$\tilde{U}_{n-1} \geqslant \max\left\{\tilde{B}_{n-1}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{V}_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]\right\} = \tilde{V}_{n-1}.$$

该结论由逆向归纳可得. 过程 $\{\tilde{V}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 称作 $\{\tilde{B}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 的极小包 (snell envelope). □

注释 由命题 2.4.6，可记

$$\tilde{V}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n$$

其中 $\{\tilde{M}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个鞅且 $\{\tilde{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $A_0 = 0$ 的非减过程. 由于市场是完全的，因此可通过持有一份在第 n 个时段内由 ϕ_n 份额股票和 ψ_n 份额现金债券构成的投资组合来精确地对冲 M_N. 美式期权的出售者通过持有这样一个投资组合可以更好规避因出售期权而带来的损失. 期权的持有者将在当 $\tilde{A}_{j+1}$ 是非零的 (又称过程 $\{\tilde{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是可料的) 首达时间 j 执行，由于此时更适合于出售期权且根据对冲组合 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{j\leqslant n\leqslant N}$ 投入资金. □

2.5 二项式表示定理

在鞅的框架中给衍生产品定价相当于取一个期望. 但是只有当构造一个对冲组合时套利价格才有意义. 若已知对冲组合，那么在前述定义 2.3.10 的讨论中可以看到，我们可以把这个投资组合的贴现值表示为在关于贴现的股票价格的投资组合中持有的股票的“离散随机积分”，衍生产品也可同样如此. 为了把衍生产品的贴现价格转换成一个对冲组合，需要下面命题 2.3.11 的逆命题. 我们在股票价格的二项式树模型的背景中讨论.

定理2.5.1(二项式表示定理) 假设测度 $\mathbb{Q}$ 使得贴现的二项式树价格过程 $\{\tilde{S}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{Q}$ - 鞅. 若 $\{\tilde{V}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是任一另外的 $(\mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ - 鞅，那么就存在一个 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$- 可料过程 $\{\phi_n\}_{n\geqslant 1}$ 使得 [43]

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{j+1}(\tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j). \tag{2.10}$$

证 考虑二项式树上的一个单时段. 为了简便记

$$\Delta\tilde{V}_{i+1}=\tilde{V}_{i+1}-\tilde{V}_i,\quad \Delta\tilde{S}_{i+1}=\tilde{S}_{i+1}-\tilde{S}_i.$$

在 $i\delta t$ 时刻给定它们的值，$\tilde{V}_{i+1}$ 和 $\tilde{S}_{i+1}$ 都可取两个可能值中的一个，这两个可能值分别记作 $\{\tilde{V}_{i+1}(u),\tilde{V}_{i+1}(d)\}$ 和 $\{\tilde{S}_{i+1}(u),\tilde{S}_{i+1}(d)\}$.

记 $\Delta\tilde{V}_{i+1}=\phi_{i+1}\Delta\tilde{S}_{i+1}+k_{i+1}$，其中 ϕ_{i+1} 和 k_{i+1} 在 $i\delta t$ 时刻都是已知的. 换句话说，要求 ϕ_{i+1} 和 k_{i+1} 使得

$$\tilde{V}_{i+1}(u)-\tilde{V}_i=\phi_{i+1}\Big(\tilde{S}_{i+1}(u)-\tilde{S}_i\Big)+k_{i+1},$$

且

$$\tilde{V}_{i+1}(d)-\tilde{V}_i=\phi_{i+1}\Big(\tilde{S}_{i+1}(d)-\tilde{S}_i\Big)+k_{i+1}.$$

解得

$$\phi_{i+1}=\frac{\tilde{V}_{i+1}(u)-\tilde{V}_{i+1}(d)}{\tilde{S}_{i+1}(u)-\tilde{S}_{i+1}(d)}$$

且 $k_{i+1}=\tilde{V}_{i+1}(u)-\tilde{V}_i-\phi_{i+1}(\tilde{S}_{i+1}(u)-\tilde{S}_i)$，它们在 $i\delta t$ 时刻都是已知的.

现在 $\{\tilde{V}_i\}_{i\geqslant 0}$ 和 $\{\tilde{S}_i\}_{i\geqslant 0}$ 都是鞅，因此

$$\mathbb{E}[\Delta\tilde{V}_{i+1}|\mathcal{F}_i]=0=\mathbb{E}[\Delta\tilde{S}_{i+1}|\mathcal{F}_i]$$

由上可知 $k_{i+1}=0$.

换句话说，

$$\Delta\tilde{V}_{i+1}=\phi_{i+1}\Delta\tilde{S}_{i+1},$$

其中 ϕ_{i+1} 在 $i\delta t$ 时刻是已知的. 对上式两边求和就可得到所要的结论. □

从鞅表示定理到复制投资组合 [44]

由前面的讨论可知，若 $\{\tilde{V}_i\}_{i\geqslant 0}$ 是权益的贴现值，那么当构造复制投资组合时使得一个可料过程 $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$ 作为持有的股票出现. 我们也可以用其他的方法. 给定 $\{\phi_i\}_{i\geqslant 1}$，是否可以构造一个自融资的复制投资组合？不用惊讶，答案是肯定的.

构造策略 在 i 时刻，购买一份由 ϕ_{i+1} 份额股票和 $\tilde{V}_i-\phi_{i+1}\tilde{S}_i$ 份额现金债券构成的投资组合.

我们必须验证这个策略是可行的. 为了方便记 B_i 为 $i\delta t$ 时刻债券的价值.

假定在 $i\delta t$ 时刻购买了 ϕ_{i+1} 份额股票和 $(\tilde{V}_i-\phi_{i+1}\frac{S_i}{B_i})$ 份额现金债券， 这花费了

$$\phi_{i+1}S_i+\Big(\tilde{V}_i-\phi_{i+1}\frac{S_i}{B_i}\Big)B_i=\tilde{V}_iB_i=V_i.$$

那么在 $(i+1)\delta t$ 时刻该投资组合的价值为

$$\begin{aligned}\phi_{i+1}S_{i+1}+\left(\tilde{V}_i-\phi_{i+1}\tfrac{S_i}{B_i}\right)B_{i+1} &= B_{i+1}\left(\phi_{i+1}\left(\tfrac{S_{i+1}}{B_{i+1}}-\tfrac{S_i}{B_i}\right)+\tilde{V}_i\right)\\ &= \tilde{V}_{i+1}B_{i+1} \quad \text{(根据二项式表示定理)}\\ &= V_{i+1},\end{aligned}$$

这完全足以在 $(i+1)\delta t$ 时刻构造新的投资组合. 而且, 在 $N\delta t$ 时刻恰好有与权益的价值相等的资金.

复制 3 步骤: 定价和对冲一个在 T 时刻的权益 C_T 有 3 个步骤.

- 找一个概率测度 $\mathbb{Q}$ ，在该测度下贴现的股票价格 (有它的自然 σ - 域流) 是一个鞅.
- 构造贴现的价值过程，
$$\tilde{V}_i = \mathrm{e}^{-ri\delta t}V_i = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T \middle| \mathcal{F}_i\right].$$
- 找一个可料过程 $\{\phi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 使得
$$\Delta\tilde{V}_i = \phi_i\Delta\tilde{S}_i.$$

2.6 连续模型预览

在严格导出关于欧式期权值的 Black-Scholes 定价公式之前，首先要为它建立一个可靠的框架. 作为一个很自然的想法，可用离散的方法去探讨在连续情形下结果是怎样的形式.

我们应该用非常小的时段的离散模型去逼近连续模型，显然它是可信的. Black-Scholes 模型是基于在 1.2 节中提及的对数正态模型，有了这个想法， 可选择有固定增长率和“噪声”的逼近方法. [45]

带常值股票增长和噪声的模型

模型是以时间步长 δt 和 3 个固定常数 ν，σ 和无风险利率 r 为参数.

- 现金债券有形式 $B_t = \mathrm{e}^{rt}$，与时间间隔长度无关.
- 股票价格过程取决于二项式树上的节点. 若股票当前值为 s，那么经过下一个时段它将变为新的值

$$\begin{cases} s\exp(\nu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}), & \text{如果上升,}\\ s\exp(\nu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}), & \text{如果下降.}\end{cases}$$

假设上跳或下跳的概率相同，则在市场测度下，在每个时段上 $\mathbb{P}$[上跳]=1/2=$\mathbb{P}$[下跳].

对于一个固定的时刻 t，设 N 是到时刻 t 为止的时段数，即 $N = t/\delta t$，那么

$$S_t = S_0 \exp\left(\nu t + \sigma\sqrt{t}\left(\frac{2X_N - N}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

其中 X_N 是 N 次独立的跳中向上跳的次数. 为了探讨当 $\delta t \to 0$(或等价于 $N \to \infty$) 时的情况，需要用到中心极限定理.

定理2.6.1(中心极限定理) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为独立同分布的随机变量的一个序列，在概率测度 $\mathbb{P}$ 下，这些随机变量的均值为 μ，方差为 σ^2，且设 $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$，那么

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

当 $n \to \infty$ 时按分布收敛到一个服从 $N(0,1)$ 的随机变量.

现在 X_N 是 N 个取值为 $+1$ 和 0 的概率都为 $1/2$ 的独立随机变量 $\{\xi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 的和. 即 $\mathbb{E}[\xi_i] = \frac{1}{2}, \mathrm{var}[\xi_i] = \frac{1}{4}$，因此由中心极限定理，随机变量 $(2X_N - N)/\sqrt{N}$ 的分布收敛到均值为 0 且方差为 1 的正态分布. 换句话说，当 δt 变得很小 (即 N 变得很大) 时，S_t 的分布收敛到一个对数正态分布. 确切地说，在这个极限中，$\log S_t$ 是均值为 $\log S_0 + \nu t$，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布.

在鞅测度下

这是在最初的测度 $\mathbb{P}$ 下的情况. 那么在用来定价的鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下将会发生什么呢?

由引理 1.3.2，在鞅测度下，向上跳的概率为

$$p = \frac{\exp(r\delta t) - \exp(\nu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})}{\exp(\nu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}) - \exp(\nu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})},$$

[46] 它近似于

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\delta t}\left(\frac{\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma}\right)\right).$$

因此在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，X_N 仍服从二项式分布，但是此时均值为 Np，方差为 $Np(1-p)$.

从而在 $\mathbb{Q}$ 下，当 δt 趋近于零时，$(2X_N - N)/\sqrt{N}$ 的均值趋向于 $-\sqrt{t}(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)/\sigma$, 且方差趋向于 1. 再次使用中心极限定理，随机变量 $(2X_N - N)/\sqrt{N}$ 收敛到一个均值为 $-\sqrt{t}(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)/\sigma$ 且方差为 1 的正态分布的随机变量. 那么在 $\mathbb{Q}$ 下，S_t 服从均值为 $\log S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ 且方差为 $\sigma^2 t$ 的对数正态分布. 可记作

$$S_t = \exp\left(\sigma\sqrt{t}Z + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right),$$

其中，在 $\mathbb{Q}$ 下，随机变量 Z 服从均值为零且方差为 1 的正态分布.

若把离散的理论完全应用到连续情形中，那么在连续模型中，一份 T 时刻敲定价格为 K 的欧式看涨期权在零时刻的价格将是鞅测度下权益的贴现期望值，即为

看涨期权的定价

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)_+],$$

其中 r 是无风险利率. 代入上式可得

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_0\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)-K\exp(-rT)\right)_+\right]. \tag{2.11}$$

我们将在第 5 章中严格推导出这个定价公式，在那里也可证明等式 (2.11) 可等于下式

$$S_0\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-K\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

其中 Φ 是标准正态分布函数，

$$\Phi(z)=\mathbb{Q}[Z\leqslant z]=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

习 题

1. 注意到像第 1 章中单时段三值模型一样，两时段二项式树模型在时刻 2 允许股票取 3 个不同的值. 然而，证明每个权益都能由自融资的投资组合精确复制，即市场是完全的.

更一般地，证明若市场遵循 k 时段的二项式树模型，那么它也是完全的. [47]

2. 证明由二叉树模型上逆向归纳所得的权益的价格就是 2.1 节中引入的关于路径概率的权益的贴现期望值.

3. 考虑两个日期 T_0，T_1 且 $T_0<T_1$. 一张**远期启动期权** (forward start option) 是这样一份合约：即在没有额外费用的情形下，持有人在 T_0 时刻拥有一份到期日为 T_1 且敲定价为 S_{T_0}(在 T_0 时刻的资产价格) 的期权. 假定股票的价格遵循一个两时段的两叉模型，其中在 T_0 时刻资产的价格为 S_0u 或 S_0d，在 T_1 时刻为 S_0u^2，S_0ud 和 S_0d^2 中的一个，且

$$d<\min\{\mathrm{e}^{rT_0},\mathrm{e}^{r(T_1-T_0)}\}\leqslant\max\{\mathrm{e}^{rT_0},\mathrm{e}^{r(T_1-T_0)}\}<u,$$

其中 r 为无风险利率. 求这样一份期权在零时刻的公平价格.

4. **数字期权** (digital option) 是收益不连续依赖于资产价格的期权. 一个最简单的例子就是**现金或无值期权** (cash-or-nothing option)，对于持有者来说在到期日 T 时刻的收益为 $X\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}$，其中 X 是某些预先规定的现金和.

假定资产价格遵循二项式树模型，其中在每一个时段上，资产价格从它当前值 S_n 变为 S_nu 或 S_nd. 通常情况下，若 ΔT 表示每个时间步长，且 $d < \mathrm{e}^{r\Delta T} < u$.

求上述期权在零时刻的价格，也可以和的形式写出结果.

5. 令 C_t 为一份到期日为 T，敲定价为 K 且不支付红利的美式看涨期权在 t 时刻的价值. 若无风险利率为 $r > 0$，证明

$$C_t \geqslant S_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} > S_t - K,$$

并推导在到期日 T 之前实施该期权都是不明智的.

6. 令 C_t 如习题 5 中所述，且记 P_t 为同一个股票且具有相同到期日和敲定价格的美式看跌期权的价值. 通过比较两个适当投资组合的价值，证明

$$C_t + K \geqslant P_t + S_t.$$

利用欧式期权的看跌 – 看涨平价公式和习题 5 的结论，证明

$$P_t \geqslant C_t + K\mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t.$$

合并这些结论可得，若 $r > 0$ 且 $t < T$，则

$$S_t - K \leqslant C_t - P_t < S_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

48

并推导若利率为零，那么看跌期权提前实施毫无益处.

7. 若在红利 D 被支付之前股票的价格恰好为 S，问支付之后的那一刻它的值是多少？假设股票在离散的时刻 $T_0, T_1, \cdots, T_n$ 上支付红利，证明美式看涨期权在到期日之前实施可能是明智的.

8. 假定图 2-3 中的股票在时刻 2 支付它的值的 5%作为红利. 与前面一样利率为零，且在时刻 2 和时刻 3 之间股票的价格上升或下降 20. 求到期日为时刻 3 且敲定价格为 100 的美式看涨期权在零时刻的价格. 提前实施永远是明智的吗？

9. 考虑例 2.2.3 中的美式看跌期权，现在假定利率为在 $i\delta t$ 时刻价值 1 美元的现金债券在 $(i+1)\delta t$ 时刻的价值为 1.1 美元. 求该期权的价值. 问它将在什么时候实施？

10. 假设资产价格遵循二项式树模型. 为了简便，假定无风险利率为零且 ΔT 为 1. 在概率 $\mathbb{P}$ 下，假定在每一个时段上股票的价格上升的概率为 p，下降的概率为 $1-p$.

条件期望

$$M_n \triangleq \mathbb{E}[S_N|\mathcal{F}_n], \qquad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

是一个随机过程. 验证它是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅，并求随机变量 M_n 的分布.

11. (a) 列举一个不是鞅的马尔可夫过程.

(b) 列举一个不是马尔可夫过程的鞅.

12. 证明一个可料的鞅是常数.

13. 令 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下的简单随机游动. 计算 $\mathbb{E}[S_n]$ 和 $\mathrm{var}[S_n]$.

14. 令 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下的一个简单对称的随机游动，即在例 2.3.7 的记号中 $p=1/2$. 证明 $\{S_n^2\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$ - 下鞅且 $\{S_n^2-n\}_{n\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$ - 鞅.

15. 与习题 14 中一样，令 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下的一个简单对称的随机游动且记 $X_n=S_n+1$. (注意 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ 是在零时刻从 1 开始的简单随机游动.)

令 $T=\inf\{n: X_n=0\}$. 证明 T 是一个停时且若 $Y_n=X_{T\wedge n}$，那么 $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ 是个非负鞅. 因此，由定理 2.4.5，当 $n\to\infty$ 时它收敛到极限 Y_∞.

证明对于所有的 n，有 $\mathbb{E}[Y_n]=1$，但 $Y_\infty=0$. 为什么这与可选停止定理的结论不相矛盾? [49]

16. 回顾詹生不等式：若 g 是个凸函数且 X 是个实值随机变量，那么

$$\mathbb{E}[g(X)]\geqslant g(\mathbb{E}[X]).$$

把它与不支付红利的美式看涨期权的贴现价格的特性 (例 2.4.7) 结合在一起作为包含 $\{e^{-rn\delta t}(S_n-K)_+\}_{n\geqslant 0}$ 的最小 $\mathbb{Q}$ - 上鞅，证明不支付红利的美式看涨期权的价格与具有相同到期日和敲定价格的欧式看涨期权的价格是相同的. [50]

第 3 章　布朗运动

引　言

离散模型仅仅是对股票市场的实际运行方式的一个粗略的模拟．一个好的模型将能给出股票在任意时刻的价格．早在 1900 年巴舍利耶就在他的论文“La théorie de la spéculation”中提出布朗运动作为股票价格变动的模型．即使今天布朗运动仍是构造连续时间下市场模型的基础．在进一步研究金融理论之前，首先来定义和构造布朗运动．

首先我们继续采用 2.6 节中的方法，即将布朗运动看作“无穷小的”随机游动，也就是在这种无穷小的随机游动中，对越来越小的时间间隔采取越来越小的步长．这将会自然而然地引出过程的定义．在 3.2 节将给出莱维定义的布朗运动随机过程的形式构造，但这部分可以放心地略去．接下来，在 3.3 节将给出后面几章所需要的过程的一些事实．这部分材料也可以跳过，当用到时再回头查看．

正是由于离散参数鞅在随机游动的研究中起着关键的作用，因此将采用连续时间鞅理论来简化对布朗运动的计算．在 3.4 节中把离散参数鞅的定义与基本结果推广到连续时间情形．

3.1　随机过程的定义

“无穷小的随机游动”是研究布朗运动最简单的方法，并且这也是在应用中经常应用的方法，所以为了导出这个过程的正式定义，首先来研究简单的随机游动．

简单随机游动的性质 [51]

例 2.3.7 表明，如果 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$\xi_i\in\{-1,+1\}$，并且 ξ_i 在测度 $\mathbb{P}$ 下独立同分布，那么随机过程 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 在测度 $\mathbb{P}$ 下是一个简单的随机游动．注意对称情形，

$$\mathbb{P}[\xi_i=-1]=\frac{1}{2}=\mathbb{P}[\xi_i=+1].$$

这个过程通常看作一个重复的公平游戏中的获得的模型. 例如：假定和一个朋友玩游戏，在每一次游戏中都是抛出一枚均匀的硬币，如果硬币正面向上付他 1 美元，否则他付 1 美元. 对于每一个 n，S_n 表示在第 n 次游戏结束后得到的净收益.

回顾第 2 章的习题 13 可知，$\mathbb{E}[S_n]=0$，$\mathrm{var}(S_n)=n$.

引理3.1.1 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 鞅 (根据自然 σ - 域流)，并且

$$\mathrm{cov}(S_n,S_m)=n\wedge m.$$

证 在例 2.3.7 中已证明 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅. 下面计算协方差

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(S_n,S_m) &= \mathbb{E}[S_nS_m]-\mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[S_m]\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_nS_m\mid \mathcal{F}_{m\wedge n}]] \qquad \text{(塔性质)}\\ &= \mathbb{E}[S_{m\wedge n}\mathbb{E}[S_{m\vee n}\mid \mathcal{F}_{m\wedge n}]]\\ &= \mathbb{E}[S_{m\wedge n}^2] \qquad \text{(鞅性质)}\\ &= \mathrm{var}(S_{m\wedge n})\\ &= m\wedge n.\end{aligned}$$

□

作为随机变量 $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ 独立性的一个结果，如果 $0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant l$，那么 S_j-S_i 与 S_l-S_k 是独立的. 更一般地，如果 $0\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n$，那么 $\{S_{i_r}-S_{i_{r-1}}:1\leqslant r\leqslant n\}$ 是相互独立的. 而且，比如说，如果 $j-i=l-k=m$，那么 S_j-S_i 与 S_l-S_k 二者都具有与 S_m 相同的分布.

> **记号：** 对于两个随机变量 X 和 Y，记
> $$X\stackrel{\mathcal{D}}{=}Y$$
> 表示 X 和 Y 有相同的分布.
> 记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 表示随机变量 X 服从均值为 μ 和方差为 σ^2 的正态分布.

结合上述结论有

引理3.1.2 *在测度 $\mathbb{P}$ 下，过程 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 具有平稳独立增量.*

引理 3.1.1 与引理 3.1.2 足以刻画对称的简单随机游动. [52]

随机游动的量化

回顾前面我们曾经把布朗运动考虑为无限小的随机游动. 根据上面的赌博游戏，两次游戏的时间间隔为 δt，赌注为 δx，我们认为它们都“趋于 0”. 为了获得非平凡的极限，δt 与 δx 之间必存在一定的关系. 为了考察这个关系是什么，应用中心极限定理 (见 2.6 节). 在这种情况下，$\mu=\mathbb{E}[\xi_i]=0$ 且 $\sigma^2=\mathrm{var}(\xi_i)=1$. 因此，取 $\delta t=1/n$，$\delta x=1/\sqrt{n}$，

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right]\to\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y,\qquad \text{当}n\to\infty.$$

更一般地，

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \leqslant x\right] \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-y^2/2t} \mathrm{d}y, \quad 当 n \to \infty,$$

其中，$[nt]$ 表示 nt 的整数部分 (习题 1). 对这个极限过程，在 t 时刻，从零时刻以来的净收益将服从均值为 0 和方差为 t 的正态分布.

布朗运动的定义

正如与离散时间随机过程的定义一样，正式地定义一个连续时间随机过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，需要一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，使得 X_t 对所有的 t 都是 $\mathcal{F}$- 可测的. 然而，和离散情形一样，我们几乎不能显式地给出 Ω.

随机游动的极限这一段表明，下述对布朗运动的定义是合理的.

定义3.1.3(布朗运动) 一个实值随机过程 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 布朗运动(或一个 $\mathbb{P}$ - 维纳过程)，如果对某个实常数 σ，在测度 $\mathbb{P}$ 下满足

1. 对每个 $s \geqslant 0$ 和 $t > 0$，随机变量 $W_{t+s} - W_s$ 服从均值为 0，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布，

2. 对每个 $n \geqslant 1$ 和任意时刻 $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$，随机变量 $\{W_{t_r} - W_{t_{r-1}}\}$ 是相互独立的，

3. $W_0 = 0$，

4. 当 $t \geqslant 0$ 时，W_t 是连续的.

注释 像离散情形下一样，条件 1 和条件 2 确保布朗运动具有平稳独立增量.

条件 3 是约定的. 从 x 开始的布朗运动可表示为 $\{x + W_t\}_{t\geqslant 0}$.

在某种意义下，条件 4 是前 3 个条件的一个结论，但是我们应当相信布朗运动所遵循的所有路径上的随机过程都是连续的. □

53

参数 σ^2 是已知的方差. 通过正态分布的尺度变换立刻看到，$\{W_{t/\sigma}\}_{t\geqslant 0}$ 是具有一个方差参数的布朗运动.

定义3.1.4 方差 $\sigma^2 = 1$ 的过程称为标准布朗运动.

假设: 除非事先说明，我们始终假定 $\sigma^2 = 1$.

结合定义 3.1.3 中的条件 1 和条件 2 可知，标准布朗运动的转移概率 (transition probability) 如下：

$$\mathbb{P}\left[W_{t_n} \leqslant x_n \middle| W_{t_i} = x_i, 0 \leqslant i \leqslant n-1\right] = \mathbb{P}\left[W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \leqslant x_n - x_{n-1}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_n - x_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right) \mathrm{d}u.$$

记号：用 $p(t,x,y)$ 表示**转移密度** (transition density)，

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2t}\right).$$

当 $W_s=x$ 时，这就是随机变量 W_{t+s} 的概率密度函数.

对于 $0=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$，记 $x_0=0,W_{t_1},\cdots,W_{t_n}$ 的联合概率密度函数可以表示为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_1^n p(t_j-t_{j-1},x_{j-1},x_j).$$

对每一个 $n\geqslant 1$ 和所有的 $t_1,\cdots,t_n$，$W_{t_1},\cdots,W_{t_n}$ 的联合分布被称为随机过程的**有限维分布** (finite dimensional distribution).

立即可得下面与引理 3.1.1 类似的情况.

引理3.1.5 对任意的 $s,t>0$，有

1. $\mathbb{E}\big[W_{t+s}-W_s\big|\{W_r\}_{0\leqslant r\leqslant s}\big]=0$,
2. $\operatorname{cov}(W_s,W_t)=s\wedge t$.

事实上，由于多变量正态分布的随机变量由它的均值与协方差决定，且正态分布的随机变量当且仅当它们的协方差为 0 时是相互独立的，结合路径的连续性就可以刻画标准布朗运动. [54]

布朗运动的特性

正是由于布朗运动的样本路径是连续的，但并不意味着在任何其他情形下都是较好的. 事实上，布朗运动的行为显然是不规则的，下面是它的一些奇怪的行为特性.

1. 尽管 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 处处连续，但它是 (以概率 1) 处处不可微的.
2. 不管实数正的有多大，负的有多小，布朗运动最终都会到达到任何一个实数. 不管在轴上方有多远，它都会在后来某一时刻 (以概率 1) 重新回到零.
3. 一旦布朗运动达到一个值，它将立即无限次达到该值 (并且在任意多次后返回).
4. 不管你用什么尺度来观察布朗运动，它看上去都是一样的. 布朗运动都是一个分形.

习题 9 表明随机过程在 $t=0$ 时刻不可微. 下面将讨论一些与 3.3 节和习题 8 中的到达概率相关的一些性质. 在最后一个注释中，间接提到的尺度将在命题 3.3.7 中给出正式的证明. 这实际上是构造过程的一个结论. 图 3-1 解释了布朗运动路径特定实现的一个结果.

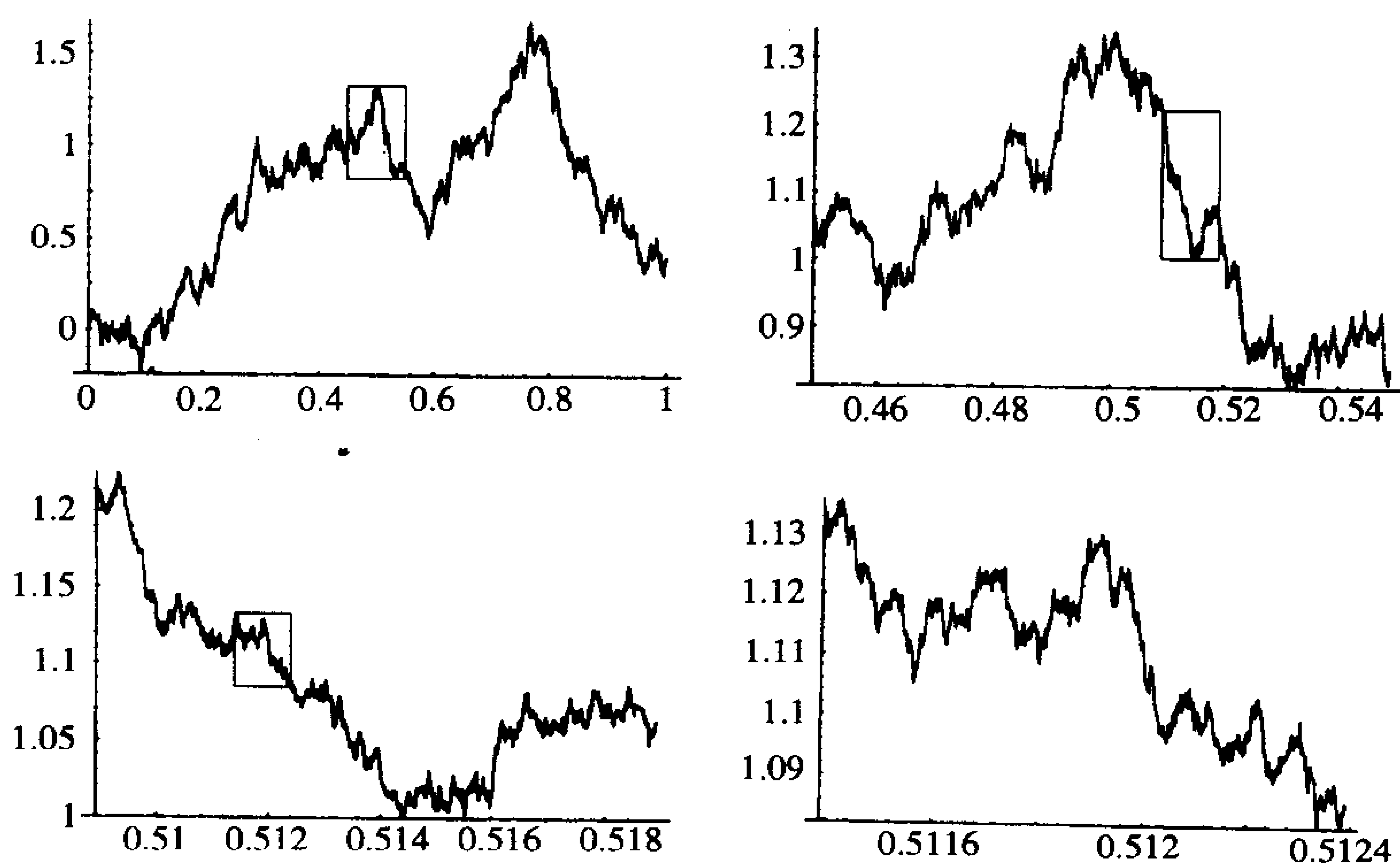


图 3-1: 放大的布朗运动

55 这种奇异的过程确实存在但不常见，我们将在下一节讨论.

3.2 布朗运动的莱维构造

上面已暗示布朗运动是随机游动的一个极限. 然而，在这一节将介绍由莱维给出的构造，而不讨论随机游动构造的技术细节. 更愿意相信过程的存在性的读者可能会忽略这些技术的细节.

一个多项式逼近

想法是只通过直接的多项式插值就能构造布朗运动的一条路径，我们仅仅需要一个计算.

引理3.2.1 *假定* $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ *是标准布朗运动，在条件* $W_{t_1}=x_1$ *下，* $W_{t_1/2}$ *的概率密度函数为*

$$p_{t_1/2}(x)\triangleq\sqrt{\frac{2}{\pi t_1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\frac{1}{2}x_1)^2}{t_1/4}\right)\right).$$

换句话说，服从这种条件分布的变量是一个均值为 $x_1/2$ 和方差为 $t_1/4$ 的正态分布的随机变量. 证明见习题 11.

构造 不失一般性，取 $t\in[0,1]$. 莱维构造 (以归纳方式) 建立一个对布朗运动的多项式的逼近，布朗运动包含一个可数的独立随机变量的集

合，其中的随机变量服从均值为 0 和方差为 1 的正态分布. 我们用二进制数表示的 [0,1] 中的点表示它们，一个一般变量表示为 $\xi(k2^{-n})$，这里 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{0,1,\cdots,2^n\}$.

归纳从

$$X_1(t) = t\xi(1).$$

开始，因此 X_1 是 [0，1] 上的线性函数.

第 n 步过程 X_n 在每一个区间 $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$ 上是线性的，关于 t 是连续的且满足 $X_n(0)=0$. 因此，X_n 由值 $\{X_n(k2^{-n}), k=1,\cdots,2^n\}$ 决定.

归纳步骤 取

$$X_{n+1}\Big(2k2^{-(n+1)}\Big) = X_n\Big(2k2^{-(n+1)}\Big) = X_n\Big(k2^{-n}\Big).$$

下面确定 $X_{n+1}\big((2k-1)2^{-(n+1)}\big)$ 的合适的值. 由条件 $X_{n+1}\big(2k2^{-(n+1)}\big) - X_{n+1}\big(2(k-1)2^{-(n+1)}\big)$，引理 3.2.1 知

$$X_{n+1}\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big) - X_{n+1}\Big(2(k-1)2^{-(n+1)}\Big)$$

应该服从均值为

$$\frac{1}{2}\Big(X_{n+1}\Big(2k2^{-(n+1)}\Big) - X_{n+1}\Big(2(k-1)2^{-(n+1)}\Big)\Big),$$

方差为 $2^{-(n+2)}$ 的正态分布. [56]

现在，如果 $X \sim N(0,1)$，那么 $aX+b \sim N(b,a^2)$，因此取

$$\begin{aligned}
&X_{n+1}\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big) - X_{n+1}\Big(2(k-1)2^{-(n+1)}\Big)\\
&= 2^{-(n/2+1)}\xi\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(X_{n+1}\Big(2k2^{-(n+1)}\Big) - X_{n+1}\Big(2(k-1)2^{-(n+1)}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

换句话说

$$\begin{aligned}
&X_{n+1}\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big)\\
&= \frac{1}{2}X_n\big((k-1)2^{-n}\big) + \frac{1}{2}X_n\big(k2^{-n}\big) + 2^{-(n/2+1)}\xi\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big)\\
&= X_n\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big) + 2^{-(n/2+1)}\xi\Big((2k-1)2^{-(n+1)}\Big),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

最后一个等式在 $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$ 上满足 X_n 的线性.

图 3-2 就说明了这种构造.

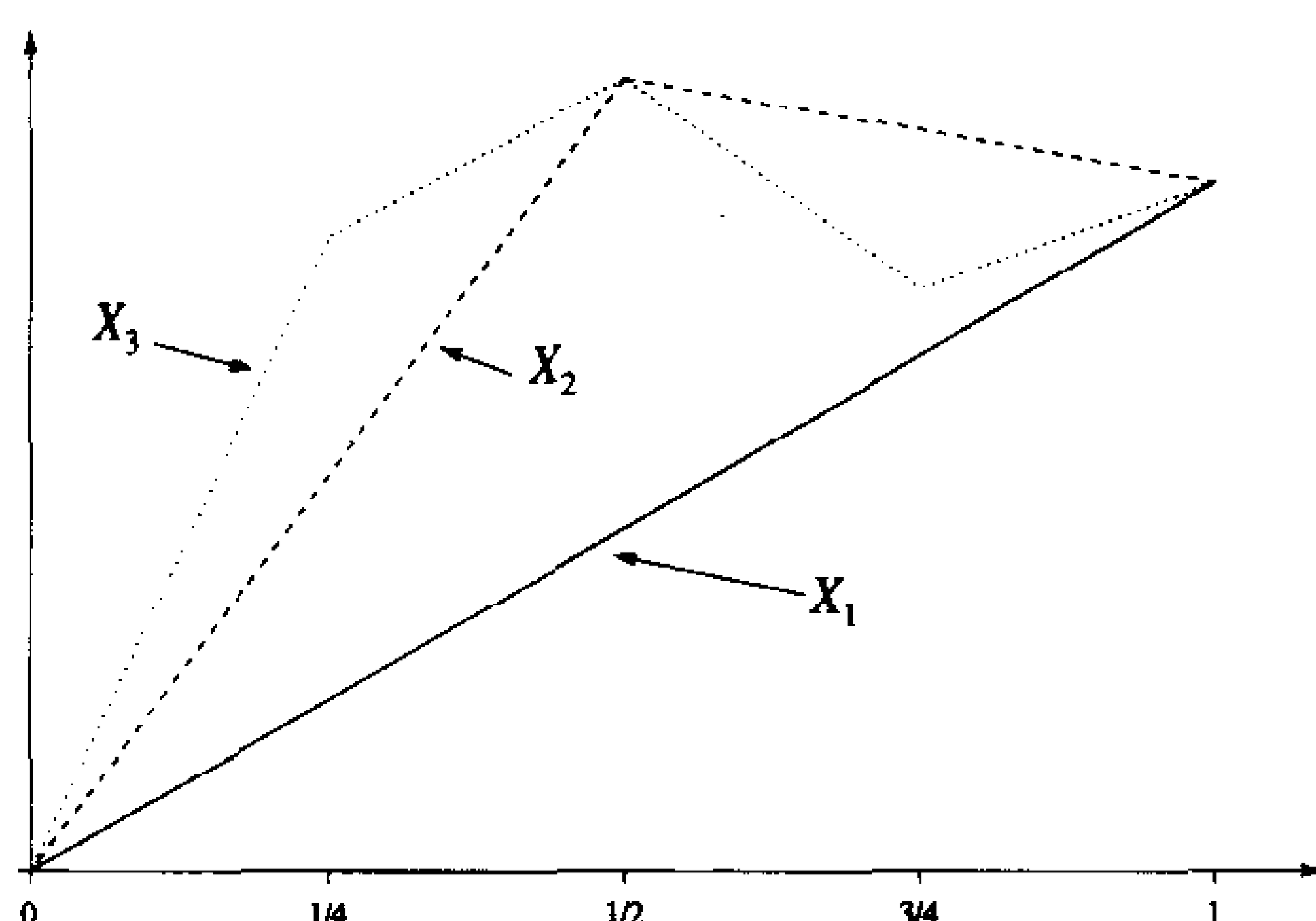


图 3-2: 布朗运动的多项式逼近的莱维序列

布朗运动是当 $n \to \infty$ 时所构造的过程. 为了验证其存在性还需一些技术上的引理. 证明是根据 Knight (1981) 改写的.

引理3.2.2

$$\mathbb{P}\Big[当 0 \leqslant t \leqslant 1,\quad \lim_{n\to\infty} X_n(t) 存在且关于 t 一致收敛\Big] = 1.$$

57 布朗运动的收敛性

证　注意到 $\max_t |X_{n+1}(t) - X_n(t)|$ 将在顶点处达到, 即对 $t \in \{(2k-1)2^{-(n+1)} : k = 1, 2, \cdots, 2^n\}$ 并应用 (3.1)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big[\max_t |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geqslant 2^{-n/4}\Big] \\ =\ &\mathbb{P}\Big[\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} \xi\big((2k-1)2^{-(n+1)}\big) \geqslant 2^{n/4+1}\Big] \\ \leqslant\ &2^n \mathbb{P}\big[\xi(1) \geqslant 2^{n/4+1}\big]. \end{aligned}$$

现在用习题 7 的结果 $(t=1)$, 对 $x > 0$

$$\mathbb{P}[\xi(1) \geqslant x] \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

并与事实

$$\exp\Big(-2^{(n/2+1)}\Big) < 2^{-2n+2}$$

结合, $n \geqslant 4$ 时可得,

$$2^n \mathbb{P}\Big[\xi(1) \geqslant 2^{n/4+1}\Big] \leqslant \frac{2^n}{2^{n/4+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-2^{(n/2+1)}\Big) \leqslant \frac{2^n}{2^{n/4+1}} 2^{-2n+2} < 2^{-n}.$$

现在考虑当 $k > n \geqslant 4$ 时

$$\mathbb{P}\Big[\max_t |X_k(t) - X_n(t)| \geqslant 2^{-n/4+3}\Big] = 1 - \mathbb{P}\Big[\max_t |X_k(t) - X_n(t)| \leqslant 2^{-n/4+3}\Big]$$

且

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\max_t |X_k(t) &- X_n(t)| \leqslant 2^{-n/4+3}\Big] \\ &\geqslant \mathbb{P}\Big[\sum_{j=n}^{k-1}\max_t |X_{j+1}(t)-X_j(t)| \leqslant 2^{-n/4+3}\Big] \\ &\geqslant \mathbb{P}\Big[\max_t |X_{j+1}(t)-X_j(t)| \leqslant 2^{-j/4}, j=n,\cdots,k-1\Big] \\ &\geqslant 1-\sum_{j=n}^{k-1} 2^{-j} \\ &\geqslant 1-2^{-n+1}.\end{aligned}$$

最后对所有的 $k \geqslant n$，有

$$\mathbb{P}\Big[\max_t |X_k(t)-X_n(t)| \geqslant 2^{-n/4+3}\Big] \leqslant 2^{-n+1},$$

左边的事件是递增的 (由于最大值只能通过补充一个新的顶点才能增加)，因此，

$$\mathbb{P}\Big[\max_t |X_k(t)-X_n(t)| \geqslant 2^{-n/4+3}, \quad \text{对某些} k>n\Big] \leqslant 2^{-n+1}.$$

特别地，对于 $\epsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big[\text{对某些} k>n \text{和} t\leqslant 1, \quad |X_k(t)-X_n(t)| \geqslant \epsilon\Big]=0,$$

定理得证. □ [58]

为了完成布朗运动的存在性证明，必须首先验证如下结论.

引理3.2.3 如果极限 $\lim_{n\to\infty} X_n(t)$ 一致存在，记 $X(t)=\lim_{n\to\infty} X_n(t)$；否则记为 0. 那么 $X(t)$ 满足定义 3.1.3 中的条件 ($t\in[0,1]$).

证 通过构造可知，对于 $T_n=\{k2^{-n}:k=0,1,\cdots,2^n\}$ 上的近似值 $X_n(t)$，定义 3.1.3 中的性质 1 ~ 3 成立. 因为对于 $k>n$，我们不能改变 X_k 在 T_n 中的值，对 $\cup_{n+1}^{\infty} T_n$ 上的 X 也同样成立. 由连续函数的一致极限是连续的，因此，条件 4 也成立，并且现在从稠密集 $\cup_{n+1}^{\infty} T_n$ 内任取近似值 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant 1$，事实上，没有 $t\in[0,1]$ 的这个限制条件，上述 4 个性质仍然都能成立. □

3.3 反射原理与尺度变换

在证明了布朗运动的存在性后，现在转向一些运算，这些运算只是下面几个章节中所需要的一点小的技巧. 下面将会在许多的章节提到布朗运动，在那里读者可获得更广泛的技能.

停时

根据布朗运动的构造， 可知它无记忆. 也就是说，如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动，并且 $S\geqslant 0$ 是任意固定的时刻，那么 $\{W_{t+s}-W_s\}_{t\geqslant 0}$ 也是一个布朗运动，并与 $\{W_r\}_{0\leqslant r\leqslant s}$ 无关. 对某些随机时间 T，也有同样地结论成立，过程 $\{W_{T+t}-W_T\}_{t\geqslant 0}$ 也是一个标准的布朗运动，并与 $\{W_s:0\leqslant s\leqslant T\}$ 无关. 在离散参数鞅的内容中已经遇到了这样的随机时间.

定义3.3.1 对于随机过程 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$，一个停时 T对每一个时刻 t 是一个随机时间，事件 $\{T\leqslant t\}$ 仅仅依赖于 t 时刻及 t 时刻以前的历史.

换句话说，通过观察直至 t 时刻的布朗运动，能确定 $T\leqslant t$ 是否成立.

仅在到达时间 (hitting time) 的情况下遇到停时. 对固定的 a ，水平 a 的到达时间定义为

$$T_a=\inf\{t\geqslant 0:W_t=a\}.$$

如果 a 永远达不到，可取 $T_a=\infty$. 不难发现 T_a 是一个停时，通过路径的连续性，

$$\{T_a\leqslant t\}=\{W_s=a,\quad \text{对某个}s,\quad 0\leqslant s\leqslant t\},$$

59

停时 T_a 仅依赖于 $\{W_s,\ 0\leqslant s\leqslant t\}$. 注意到，再次用连续性，如果 $T_a<\infty$ ，那么 $W_{T_a}=a$.

正如随机游动一样，不是停时的随机时间的一个例子是随机过程到达某个水平的最后时间.

反射原理

毫无疑问，常从布朗运动中固有的对称性得到更多的东西. 作为练习，先计算 T_a 的分布.

引理3.3.2 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个从 $W_0=0$ 出发的 $\mathbb{P}$- 布朗运动，且令 $a>0$; 那么

$$\mathbb{P}[T_a<t]=2\mathbb{P}[W_t>a].$$

证 如果 $W_t>a$，那么根据布朗运动路径的连续性可知，$T_a<t$. 而且，由于 T_a 是一个停时，$\left\{W_{t+T_a}-W_{T_a}\right\}_{t\geqslant 0}$ 是一个布朗运动，因此，通过

对称性，$\mathbb{P}[W_t - W_{T_a} > 0 | T_a < t] = 1/2$．因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[W_t > a] &= \mathbb{P}[T_a < t, W_t - W_{T_a} > 0] \\ &= \mathbb{P}[T_a < t]\mathbb{P}[W_t - W_{T_a} > 0 | T_a < t] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}[T_a < t].\end{aligned}$$

□

这个思想更精确的表述如下.

引理3.3.3 (反射原理) 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准的布朗运动，并且 T 是一个停时. 定义

$$\tilde{W}_t = \begin{cases} W_t, & t \leqslant T, \\ 2W_T - W_t, & t > T. \end{cases}$$

那么 $\{\tilde{W}_t\}_{t\geqslant 0}$ 也是一个标准的布朗运动.

注意到，如果 $T = T_a$，那么运算 $W_t \longmapsto \tilde{W}_t$ 相当于将路径在 a 上的首达时间后的路径的这一部分反射在直线 $x = a$ 上 (见图 3-3). 这里不证明反射原理的一般形式，相反，我们直接应用它. 下述结论是第 6 章中定价某种障碍期权 (barrior option) 的关键所在.

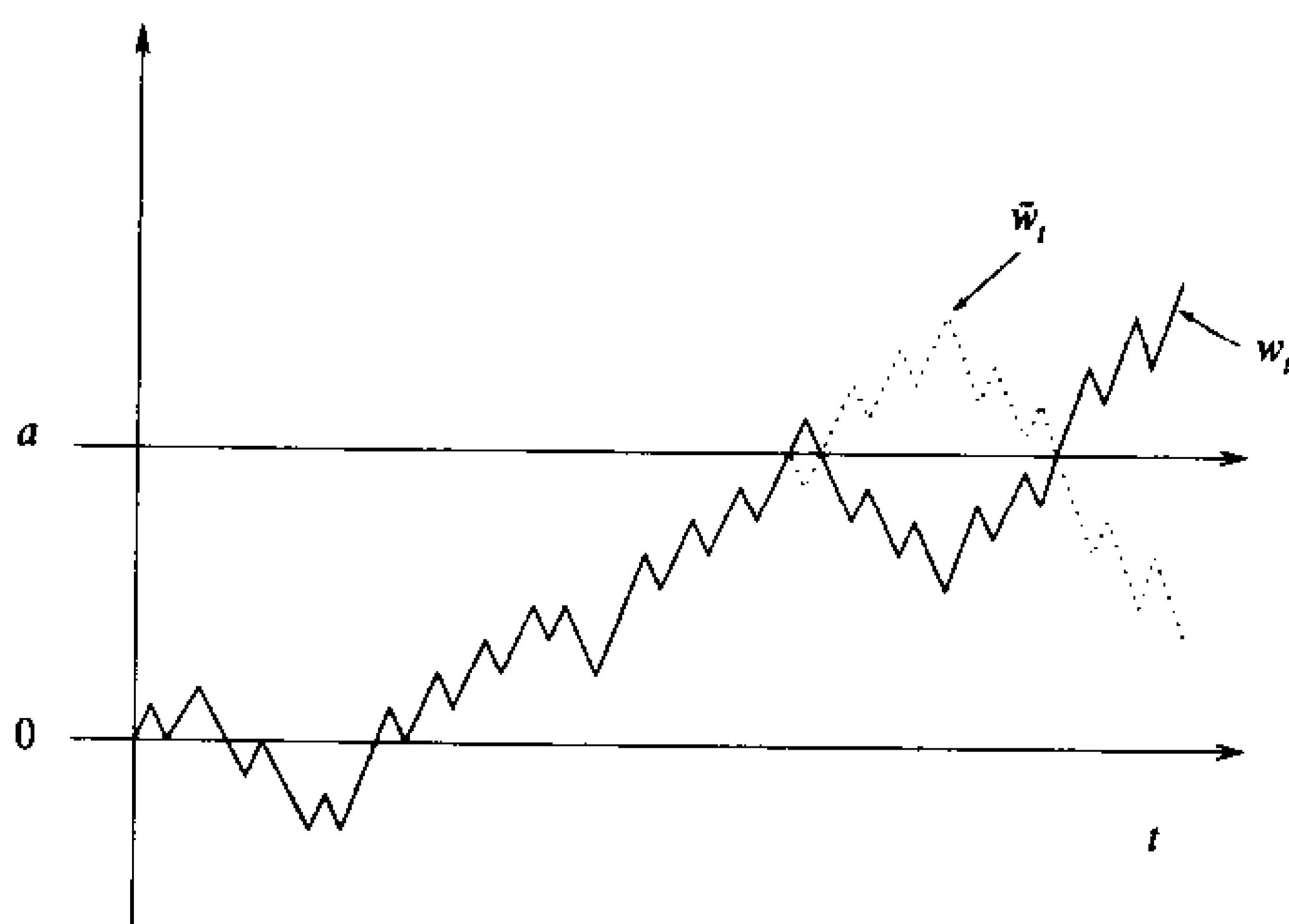


图 3-3: $T = T_a$ 时的反射原理

引理3.3.4 (布朗运动与它的最大值的联合分布) 令 $M_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s$ 是布朗运动在时间区间 $[0,t]$ 上所达到的最大水平. 那么对于 $a > 0, a \geqslant x$ 和所有的 $t \geqslant 0$，有

$$\mathbb{P}[M_t \geqslant a, W_t \leqslant x] = 1 - \Phi\left(\frac{2a - x}{\sqrt{t}}\right),$$

这里

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

60

是标准正态分布函数.

证 注意到 $M_t \geqslant 0$，且关于 t 非减，并且如果对于 $a>0$，T_a 定义为水平 a 的首达时间，那么 $\{M_t \geqslant a\}=\{T_a \leqslant t\}$. 在反射原理中取 $T=T_a$，对 $a \geqslant 0, a \geqslant x$ 和 $t \geqslant 0$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_t \geqslant a, W_t \leqslant x] &= \mathbb{P}[T_a \leqslant t, W_t \leqslant x] \\
&= \mathbb{P}[T_a \leqslant t, 2a-x \leqslant \tilde{W}_t] \\
&= \mathbb{P}[2a-x \leqslant \tilde{W}_t] \\
&= 1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

在第 3 个等式中已用到了这个事实，如果 $\tilde{W}_t \geqslant 2a-x$，那么 $\{\tilde{W}_s\}_{s\geqslant 0}$ 必定在 t 时刻之前到达水平 a，因此 $\{W_s\}_{s\geqslant 0}$ 也必定如此. □

到达斜线

在第 6 章中，为了定价永久美式看跌期权，将应用到下述的结论.

命题3.3.5 令 $T_{a,b}=\inf\{t \geqslant 0: W_t=a+bt\}$，这里如果没有这样的时间存在，$T_{a,b}$ 取无穷. 那么，对 $\theta>0, a>0$, 和 $b \geqslant 0$，有

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(-\theta T_{a,b}\big)\big]=\exp\Big(-a\Big(b+\sqrt{b^2+2\theta}\Big)\Big).$$

证 当有了鞅方法时，直到命题 3.4.9 才证明 $b=0$ 的特殊情形. 这里，首先假设这个结果成立，再来推导一般的结果.

固定 $\theta>0$，并且 $a>0, b \geqslant 0$，令

$$\psi(a,b)=\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-\theta T_{a,b}}\Big].$$

[61] 现在任取 a 的两个值 a_1 和 a_2，注意到 (见图 3-4):

$$T_{a_1+a_2,b}=T_{a_1,b}+\big(T_{a_1+a_2,b}-T_{a_1,b}\big) \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_{a_1,b}+\tilde{T}_{a_2,b},$$

其中 $\tilde{T}_{a_2,b}$ 与 $T_{a_1,b}$ 独立且与 $T_{a_2,b}$ 同分布. 换言之，

$$\psi(a_1+a_2,b)=\psi(a_1,b)\psi(a_2,b),$$

这意味着对某些函数 $k(b)$，

$$\psi(a,b)=\mathrm{e}^{-k(b)a}.$$

由于 $b \geqslant 0$，随机过程必须在到达直线 $a+bt$之前达到水平 a. 下面利用这一点把 $T_{a,b}$ 分成两部分，见图 3-5. 记 f_{T_a} 为随机变量 T_a 的概率密度函数且以 T_a 为条件，可得，

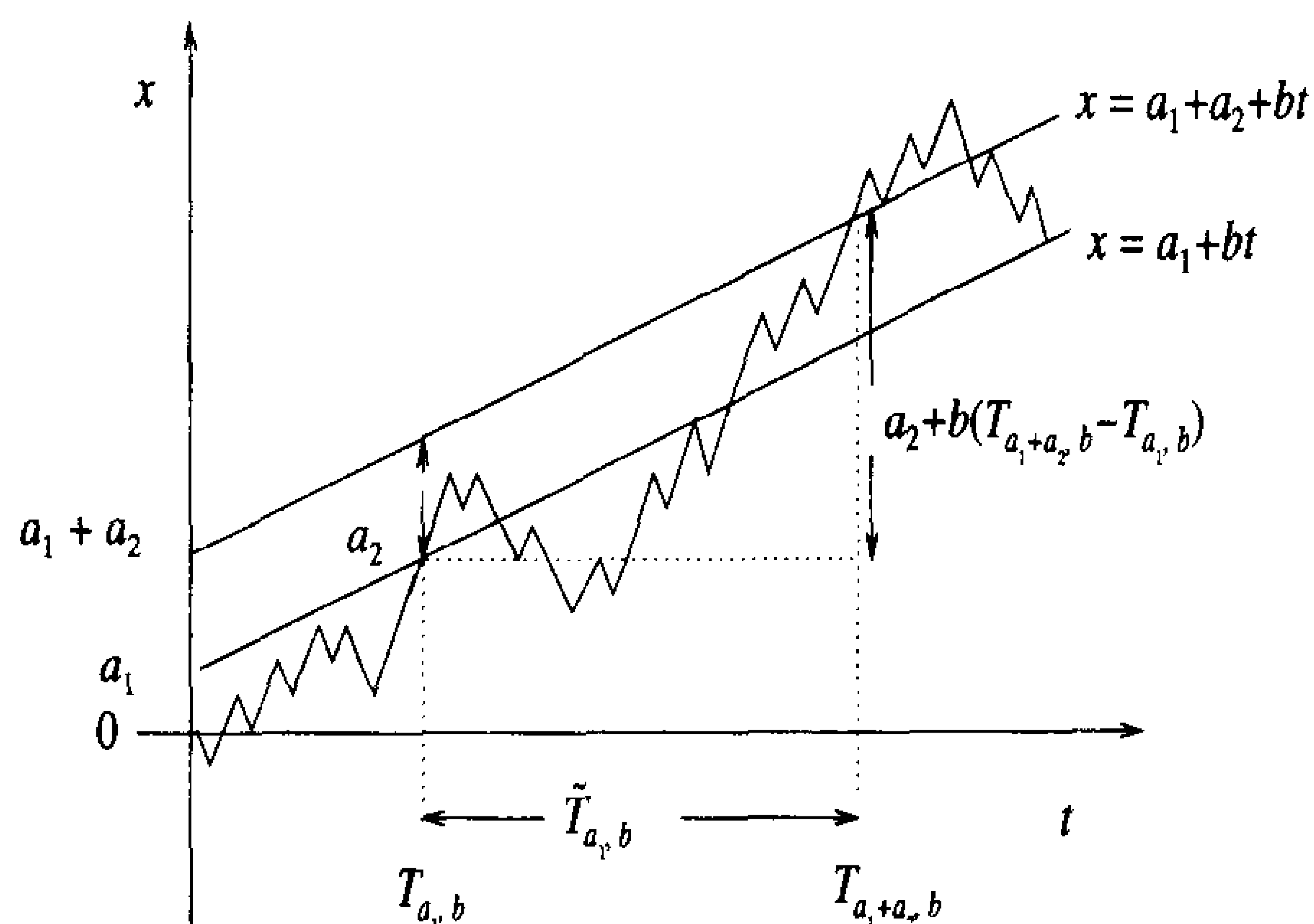


图 3-4: 在命题 3.3.5 的记号中 $T_{a_1+a_2,b} = T_{a_1,b} + \tilde{T}_{a_2,b}$，其中 $\tilde{T}_{a_2,b}$ 与 $T_{a_2,b}$ 同分布

$$
\begin{aligned}
\psi(a,b) &= \int_0^\infty f_{T_a}(t)\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-\theta T_{a,b}}\Big|T_a = t\Big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f_{T_a}(t)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-\theta T_{bt,b}}\Big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f_{T_a}(t)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-k(b)bt}\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-(\theta+k(b)b)T_a}\Big] \\
&= \exp\Big(-a\sqrt{2(\theta+k(b)b)}\Big).
\end{aligned}
$$

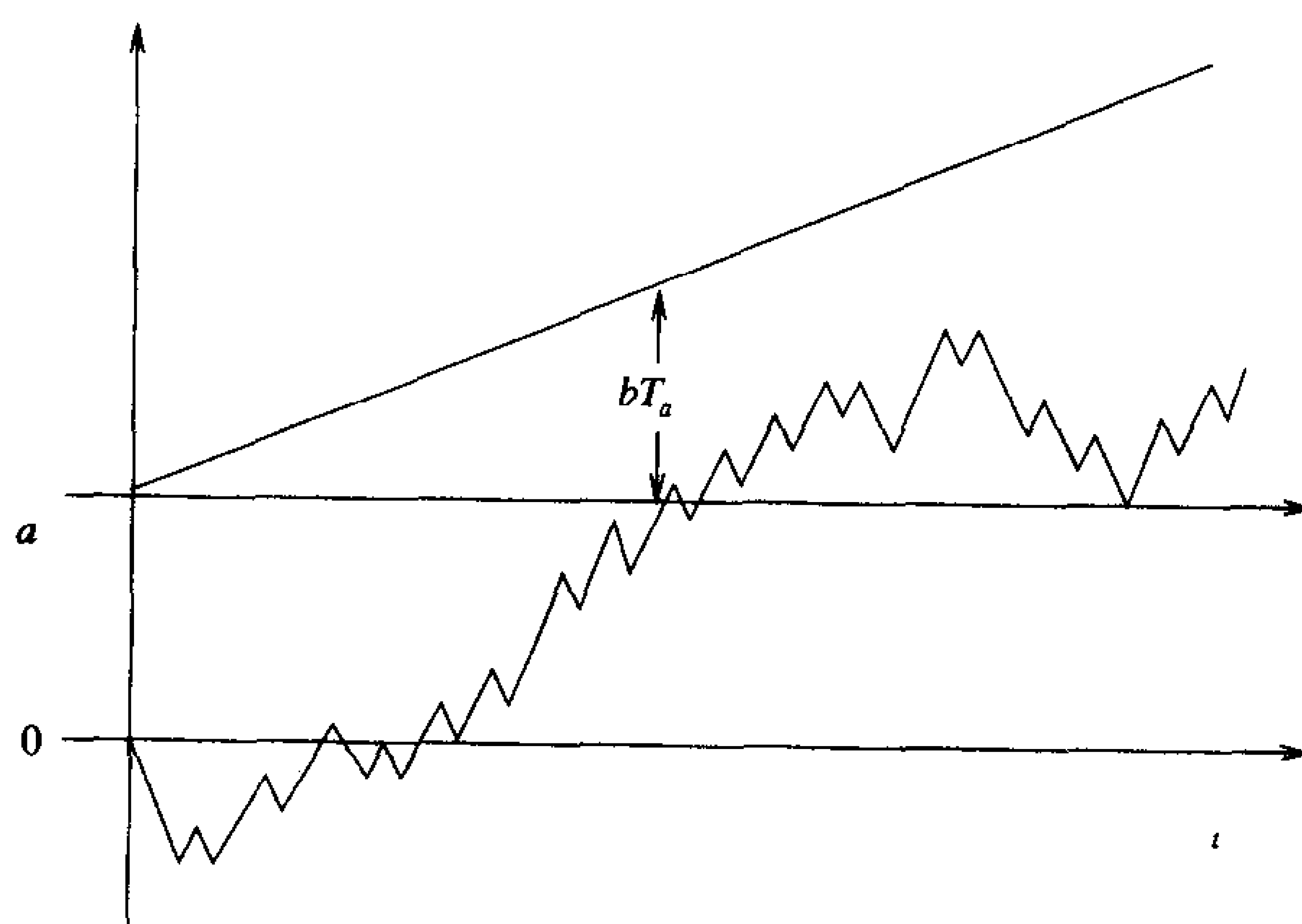


图 3-5: 在命题 3.3.5 的记号中，$T_{a,b} = T_a + \tilde{T}_{bT_a,b}$，其中 $\tilde{T}_{bT_a,b}$ 与 $T_{bT_a,b}$ 同分布

现在已得到 $\psi(a,b)$ 的两个表达式，使它们相等得

$$k^2(b) = 2\theta + 2k(b)b.$$

由于对 $\theta > 0$ ，必有 $\psi(a,b) \leqslant 1$，因此选取

$$k(b) = b + \sqrt{b^2 + 2\theta},$$

[62] 命题得证. □

定义3.3.6 对实常数 μ，随机过程 $W_t^\mu = W_t + \mu t$ 称为漂移率为 μ 的布朗运动.

在上面的记号中，$T_{a,b}$ 表示漂移率为 $-b$ 的布朗运动到达水平 a 的首达时间.

布朗运动的变换与尺度变换

综上可得如下结论.

命题3.3.7 如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是标准的布朗运动，那么下面 3 个都是标准的布朗运动，

1. 对任意实数 c，$\{cW_{t/c^2}\}_{t\geqslant 0}$，
2. $\{tW_{1/t}\}_{t\geqslant 0}$，其中当 $t=0$ 时，$tW_{1/t} = 0$,
3. 对任意固定的 $s \geqslant 0, \{W_s - W_{s-t}\}_{0\leqslant t\leqslant s}$.

证 1~3 的证明类似. 例如在 2 的情况下，很明显 $tW_{1/t}$ 具有连续的样本路径 (至少对 $t > 0$)，且对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 随机变量 $\{t_1W_{1/t_1}, \cdots, t_nW_{1/t_n}\}$ 具有多变量正态分布. 必须验证协方差含有正确的形式，而

$$\mathbb{E}\left[sW_{1/s}tW_{1/t}\right] = st\mathbb{E}\left[W_{1/s}W_{1/t}\right] = st\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = s \wedge t,$$

证明完成. □

3.4 连续时间鞅

[63] 正如在离散时间情形一样，鞅理论在连续时间模型中起着关键的作用.

回顾离散时间的情形，对每一个 r，$\mathbb{E}[|X_r|] < \infty$，序列 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 是关于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 和概率测度 $\mathbb{P}$ 的鞅，如果

$$\mathbb{E}\left[X_r | \mathcal{F}_{r-1}\right] = X_{r-1}, \quad \forall\, r \geqslant 1.$$

同样可以在连续时间情形下给出一个类似的定义.

σ - 域流

定义3.4.1 设 $\mathcal{F}$ 为 σ - 域，称 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 σ - 域流，如果:

1. 对所有的 $t, \mathcal{F}_t$ 是一个 $\mathcal{F}$ 的子 σ - 域，且
2. 对于 $s<t$，$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

正如离散情形下一样，首先讨论一个与随机过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 相关的自然 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geqslant 0}$，与前面一样，$\mathcal{F}_t^X$ 编译了区间 [0,t] 上由随机过程 X 所生成的信息. 基于对 $\{X_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$ 轨线的观察，如果它能够决定事件 A 是否发生，那么 $A \in \mathcal{F}_t^X$.

记号: 如果随机变量 Z 的取值能完全由给定的随机过程 $\{X_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$ 的轨线决定，那么记

$$Z \in \mathcal{F}_t^X.$$

关于相同的 σ - 域流，存在一个以上的可测的随机过程.

定义3.4.2 如果 $\{Y_t\}$ 是一个随机过程，使得对所有的 $t \geqslant 0, Y_t \in \mathcal{F}_t^X$，那么称 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 关于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geqslant 0}$ 是适应的.

例3.4.3

1. 随机过程
$$Z_t = \int_0^t X_s \mathrm{d}s$$
关于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geqslant 0}$ 是适应的.
2. 随机过程 $M_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s$ 关于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geqslant 0}$ 是适应的.
3. 随机过程 $Z_t \triangleq W_{t+1}^2 - W_t^2$ 关于由 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 生成的 σ - 域流是不适应的.

注意到正如在离散情形下，随机过程和概率测度扮演着不同的角色. 因此一个随机过程在概率测度 $\mathbb{P}$ 下可能是一个布朗运动，但同一过程在另一个不同的测度 $\mathbb{Q}$ 下不是一个布朗运动.

64 鞅

定义3.4.4 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间，有 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$，如果随机变量族 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 在这个空间上满足

1. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$，对所有 $t \geqslant 0$.
2. $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 与 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是适应的.
3. 对任意的 $s \leqslant t$，$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.

则称 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅.

通过限定条件 $t \in [0, T]$，我们来定义参数 [0,T] 的鞅.

通常我们不会明确规定 σ - 域流. 在所有的例子中都存在布朗运动且隐含着 σ - 域流都是布朗运动生成的.

一个更一般的概念就是局部鞅.

定义3.4.5 过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为一个局部 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，如果存在 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的停时序列 $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 使得 $\{X_{t\wedge T_n}\}_{t\geqslant 0}$ 对每个 n 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，且

$$\mathbb{P}\Big[\lim_{n\to\infty} T_n=\infty\Big]=1.$$

所有的鞅都是局部鞅，反之不成立，这是由第 4 章的许多结论加上边界条件所产生的差别造成的.

引理3.4.6 设由 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 生成 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$，如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是概率测度 $\mathbb{P}$ 下一个标准的布朗运动，那么

1. W_t 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，
2. W_t^2-t 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$- 鞅，
3.
$$\exp\left(\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t\right)$$
是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，称作指数鞅.

证 三者的证明都是类似的. 例如，考虑 $M_t=W_t^2-t$，显然 $\mathbb{E}[|M_t|]<\infty$. 现在

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[W_t^2-W_s^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[(W_t-W_s)^2+2W_s(W_t-W_s)\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[(W_t-W_s)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+2W_s\mathbb{E}[(W_t-W_s)|\mathcal{F}_s]\\ &= t-s.\end{aligned}$$

[65] 因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[W_t^2-t\Big|\mathcal{F}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[W_t^2-W_s^2+W_s^2-(t-s)-s\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &= (t-s)+W_s^2-(t-s)-s \;=\; W_s^2-s.\end{aligned}$$ □

可选停止

我们真正想要知道的是在连续时间情形下的可选停止定理. 一般地，我们不得不稍加关注 (哪里可能出错，见习题 17). 如果鞅的样本路径不够“好”，问题就会出现. 在所有的例子中随机过程都将有右连左极的样本路径.

定义3.4.7 函数 f 是 $\mathbb{R}:\longmapsto\mathbb{R}$ 上的右连左极 (càdlàg)，如果函数 f 具有左极限且是右连续的.

特别地，连续函数都是自动右连左极的 (continues *à* droite，limits *à* gauche).

定理3.4.8 (可选停止定理) 如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 关于概率测度 $\mathbb{P}$ 和 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个右连左极鞅，且如果 τ_1 与 τ_2 是两个停时使得 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant K$ 成立，其中 K 是一个有限实数，那么

$$\mathbb{E}\big[|M_{\tau_2}|\big]<\infty$$

且

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}\middle|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}, \mathbb{P}\text{- } a.s.$$

注释

1. 术语 “a.s.” (几乎一定) 表示以 ($\mathbb{P}$-) 概率 1.

2. 特别注意到，如果 τ 是一个有界停时，那么 $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$. □

布朗运动到达时间的分布

正如在离散情形下，可选停止定理是一个有力的工具. 通过计算来说明布朗运动关于水平 a 的到达时间 T_a 的矩母函数. (这个结果对于证明命题 3.3.5 是必要的.)

命题3.4.9 令 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个布朗运动，$T_a = \inf\{s \geqslant 0 : W_s = a\}$ (这个集合如果是空集，那么取无穷). 那么对 $\theta > 0$，有

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\theta T_a}\right] = \mathrm{e}^{-\sqrt{2\theta}|a|}.$$

证 假定 $a \geqslant 0$，(情形 $a < 0$ 可由对称性得到.) 应该把可选停止定理应用到鞅

$$M_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

与随机时间 T_a 上，但是会遇到一个常见的难点，由于 T_a 不是有界的，因此不能直接把这个定理应用到 T_a 上. 相反，可取 $\tau_1 = 0, \tau_2 = T_a \wedge n$. 因此有

$$\mathbb{E}\left[M_{T_a\wedge n}\right] = 1.$$

故 66

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{E}\left[M_{T_a\wedge n}\right] &= \mathbb{E}\left[M_{T_a\wedge n}\middle|T_a < n\right]\mathbb{P}[T_a < n] \\ &+ \mathbb{E}\left[M_{T_a\wedge n}\middle|T_a > n\right]\mathbb{P}[T_a > n]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

现在，根据引理 3.3.2 与习题 7 的结果，有

$$\mathbb{P}[T_a < n] \to 1, \quad 当 n \to \infty.$$

又，如果 $T_a < \infty, \lim_{n\to\infty} M_{T_a\wedge n} = M_{T_a}$. 因而如果 $T_a = \infty$，对所有的 t 有 $W_t \leqslant a$ 成立，因此有 $\lim_{n\to\infty} M_{T_a\wedge n} = 0$. 在等式 (3.2) 中令 $n \to \infty$，那么可得

$$\mathbb{E}\left[M_{T_a}\right] = 1.$$

取 $\sigma^2 = 2\theta$，命题得证. □

控制收敛定理

通过应用控制收敛定理可以简化这种类型的讨论.

定理3.4.10 (控制收敛定理) 设 $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个随机变量序列，且 $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$. 如果存在一个随机变量 Y，对所有的 n，有 $|Z_n| < Y$ 成立，且 $\mathbb{E}[Y] < \infty$，那么

$$\mathbb{E}[Z] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n].$$

在命题 3.4.9 的证明中，由于

$$0 \leqslant M_{T_a\wedge n} = \exp\left(\sigma W_{T_a\wedge n} - \frac{1}{2}\sigma^2(T_a\wedge n)\right) \leqslant \exp(\sigma a),$$

我们可以用常数 $e^{\sigma a}$ 作为控制随机变量 Y.

习 题

1. 假定 $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ 在测度 $\mathbb{P}$ 下是一个简单对称的随机游动，证明当 $n\to\infty$ 时

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \leqslant x\right] \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\mathrm{d}y,$$

其中 $[nt]$ 表示 nt 的整数部分.

2. 设随机变量 Z 在测度 $\mathbb{P}$ 下服从均值为 0 和方差为 1 的正态分布, 即 $Z\sim N(0,1)$，那么 $\sqrt{t}Z$ 服从什么样的分布? 随机过程 $X_t = \sqrt{t}Z$ 是布朗运动吗?

3. 假定 W_t 与 $\tilde{W}_t$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下相互独立的布朗运动，且令常数 $\rho\in[-1,1]$. 随机过程 $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{W}_t$ 是一个布朗运动吗？

67

4. $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是概率测度 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，下面哪些是 $\mathbb{P}$ - 布朗运动？

(a) $\{-W_t\}_{t\geqslant 0}$，

(b) $\{cW_{t/c^2}\}_{t\geqslant 0}$，其中 c 是一个常数，

(c) $\{\sqrt{t}W_1\}_{t\geqslant 0}$ ，

(d) $\{W_{2t} - W_t\}_{t\geqslant 0}$.

验证你的答案.

5. 假设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 计算 $\mathbb{E}\left[e^{\theta X}\right]$，并由此计算 $\mathbb{E}[X^4]$.

6. 证明引理 3.4.6.3.

7. 证明如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，那么对 $x>0$，有

$$\mathbb{P}[W_t \geqslant x] \equiv \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t}\mathrm{d}y \leqslant \frac{\sqrt{t}}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2t}.$$

[提示：分部积分.]

8. 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是概率测度 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，令 $Z=\sup_t W_t$. 显然任意的 $c>0$，cZ 与 Z 同分布. 推导 (依概率 1)$Z\in\{0,\infty\}$，令 $p=\mathbb{P}[Z=0]$. 通过条件 $\{W_1\leqslant 0\}$，证明

$$\mathbb{P}[Z=0]\leqslant \mathbb{P}[W_1\leqslant 0]\mathbb{P}[Z=0],$$

因此 $p=0$. 推导

$$\mathbb{P}\Big[\sup_t W_t=+\infty,\quad \inf_t W_t=-\infty\Big]=1.$$

9. 从习题 8 的结论与命题 3.3.7.2 的结果推导

$$\mathbb{P}[\text{对每一个}\epsilon>0,\quad \text{存在}s,\ t\leqslant\epsilon\ \text{使得}\ W_s<0<W_t]=1.$$

如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 在零点是可微的，推导导数一定是零，且对所有充分小的 t，$|W_t|\leqslant t$ 均成立. 根据条件 $\tilde{W}_s\triangleq sW_{1/s}$，得出矛盾，并推导布朗运动在零点是不可微的.

10. 布朗运动并不足以作股票市场的运行模型，首先它的均值为常数，然而如果仅考虑通货膨胀，公司的股票通常是以某个比率增长的. 而且，可能是“噪声”太强 (增量的方差可能比所观测到的大一些) 或者噪声太弱. 我们可以调整改变噪声的影响而人为地引进一个漂移，即使如此这仍然不能成为一个好的模型. 下面是其中一个原因. 假设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动. 通过 $S_t=\mu t+\sigma W_t$ 定义一个新的过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，其中 $\sigma>0$ 和 $\mu\in R$ 都是常数. 证明对所有的 $\sigma>0,\mu\in\mathbb{R}$ 和 $T>0$，存在一个正的概率使 得 S_T 为负. 68

11. 假定 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准的布朗运动. 证明在条件 $W_{t_1}=x_1$ 下，$W_{t_1/2}$ 的概率密度函数是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t_1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\frac{1}{2}x_1)^2}{t_1/4}\right)\right).$$

12. 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，令 T_a 是水平 a 的到达时间，即

$$T_a=\inf\{t\geqslant 0: W_t=a\}.$$

那么，在命题 3.4.9 中已证过

$$\mathbb{E}\big[\exp(-\theta T_a)\big]=\exp\big(-a\sqrt{2\theta}\big).$$

应用这一结论来计算，

(a) $\mathbb{E}[T_a]$,

(b) $\mathbb{P}[T_a<\infty]$.

13. 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示测度 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，并通过

$$M_t=\max_{0\leqslant s\leqslant t}W_s,$$

定义 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$，假定 $x \geqslant a$，计算

(a) $\mathbb{P}[M_t \geqslant a, W_t \geqslant x]$，

(b) $\mathbb{P}[M_t \geqslant a, W_t \leqslant x]$.

14. 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动. 令 $T_{a,b}$ 表示斜线 $a+bt$ 的到达时间，即

$$T_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : W_t = a + bt\}.$$

在命题 3.3.5 中证明了对于 $\theta > 0, a > 0$ 和 $b \geqslant 0$，

$$\mathbb{E}\big[\exp\big(-\theta T_{a,b}\big)\big] = \exp\Big(-a\Big(b + \sqrt{b^2 + 2\theta}\Big)\Big).$$

这个问题就是计算 $T_{a,b}$ 的分布，而不采用拉普拉斯逆变换. 在下文中，$\phi(x) = \Phi'(x)$ 且

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big) \mathrm{d}y.$$

(a) 计算 $\mathbb{P}[T_{a,b} < \infty]$.

69

(b) 根据 $sW_{1/s}$ 与 W_s 同分布这一事实，证明

$$\mathbb{P}\big[T_{a,b} \leqslant t\big] = \mathbb{P}[W_s \geqslant as + b, \quad \text{对某个}1/t \leqslant s < \infty\text{的}s].$$

(c) 根据 $W_{1/t}$ 的值，利用前面的部分来证明

$$\mathbb{P}\big[T_{a,b} \leqslant t\big] = \int_{-\infty}^{b+a/t} \mathbb{P}\big[T_{b-x+a/t,a} < \infty\big]\phi(\sqrt{t}x)\mathrm{d}x + 1 - \Phi\Big(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\Big).$$

(d) 在上式的积分中代换概率并推导

$$\mathbb{P}\big[T_{a,b} \leqslant t\big] = \mathrm{e}^{-2ab}\Phi\Big(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\Big) + 1 - \Phi\Big(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\Big).$$

15. 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动. 且令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示它的自然 σ - 域流，下面哪些是 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅?

(a) $\exp(\sigma W_t)$，

(b) cW_{t/c^2}，其中 c 是一个常数，

(c) $tW_t - \int_0^t W_s \mathrm{d}s$.

16. 设 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 表示一个与标准的 $\mathbb{P}$ - 布朗运动 $\{W_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 相关的自然 σ - 域流，引理 3.4.6.3 重新写为

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big); A\Big] = \exp\Big(\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s\Big)\mathbf{1}_A, \quad \text{对所有的}A \in \mathcal{F}_s.$$

利用积分符号下的微分法则来给出 $\{W_t^2 - t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅的另一种证明， 并证明下述也是 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅.

(a) $W_t^3 - 3tW_t$,

(b) $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$.

17. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间. 假设实值随机变量 $T : \Omega \to \mathbb{R}$ 在测度 $\mathbb{P}$ 下在 [0,1] 上是均匀分布. 定义随机变量 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & T(\omega) = t, \\ 0, & T(\omega) \neq t. \end{cases}$$

验证 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 关于自身的 σ - 域流是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅. [提示：对一个几乎必然为零的随机变量，其条件期望才是惟一的.]

证明 T 是一个停时，这里不能利用可选停止定理来证明.

18. 如前一样，设 T_a, T_b 分别表示一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 到达水平 a, b 的首达时间，但是现在 W_0 不必为零 (见定义 3.1.3 后的注释). 证明如果 $a < x < b$，那么

$$\mathbb{P}[T_a < T_b | W_0 = x] = \frac{b - x}{b - a}.$$

[提示：模仿随机游动相应结果的证明，参见命题 2.4.4.]

19. 利用习题 18 中的记号，令 $T = T_a \wedge T_b$. 证明如果 $a < 0 < b$，那么 [70]

$$\mathbb{E}[T | W_0 = 0] = -ab.$$

第 4 章 随机分析

引 言

由于布朗运动不能预测负的股票价格，因此很难将之作为一个合理的市场模型. 然而，可以通过考虑布朗运动的函数推导出一系列更广的潜在模型. 基于 Black-Scholes 定价理论的基本模型，即几何布朗运动恰恰可以通过这种方式推导出来，它承袭了布朗运动的不规则路径. 在 4.1 节中我们将看到为什么不规则路径的股票价格模型迫使我们通过套利来讨论，这本身不足以证明几何布朗运动模型的合理性. 然而，在 4.7 节中我们将给出进一步的讨论，表明它至少是一个明智的起始点. 有关几何布朗运动的不足之处的更详细的讨论将在第 7 章给出.

为了研究通过这种方法构建的模型，我们需要建立一种以布朗运动为基础的随机分析. 本章的主题是伊藤随机分析. 4.2 节将给出伊藤随机积分的定义，4.3 节推导与随机分析相应的链式法则并学习如何分部积分.

正如离散情形一样，在 Black-Scholes 框架下定价和对冲有两个关键要素首先需要改变概率测度，使得贴现资产价格成为鞅. 做这件事的工具是 4.5 节中的 Girsanov 定理. 构造对冲投资组合依赖于连续情形下的二项式表示定理，即 4.6 节的鞅表示定理.

其次，如离散情形下一样，将取一种权益期望值贴现形式的定价公式，而 Black 和 Scholes 通过一个完全不同的讨论获得了这个结果 (参见第 5 章习题 5)，在讨论中价格是作为一个偏微分方程的解获得的. 通过 4.8 节中的 Feynman-Kac 随机表示公式与概率方法联系，这个公式揭示了随机微分方程与某些二阶抛物型 (确定性) 偏微分方程之间的内在的联系.

71

再次指出，这里讨论的题材是很粗略的. 虽然如此，但那些渴望转到某些金融问题的读者或许还是希望跳过这一章的证明. 可供参考的随机分析的优秀教材很多. 有一些书在参考书目中给出.

4.1 股票价格不可微

图 4-1 显示了 $6\frac{1}{3}$ 年和 1 年期内的微软的股票价格，当然，它看起来不像是时间的一个特别好的函数，甚至用很小的时间标度，价格的轨迹看起来也很粗糙. 关于股票价格路径的不规则性的统计研究有很多. 这一节，至少在没有交易费用可以连续交易以及像通常那样无套利机会的假设条件下，通过 Lyons(1995) 的一个纯数学的讨论探究我们的股票价格模型的路径是何等的粗糙. 继续假设市场有一个无风险现金债券. [72]

首先，我们需要一个定量“粗糙度”的方法，对函数 $f:[0,T]\to\mathbb{R}$，它的变差是根据分割来定义的.

量化粗糙度

定义4.1.1 设 π 是 $[0,T]$ 的一个分割，$N(\pi)$ 是构成分割 π 的区间个数，$\delta(\pi)$ 是 π 的网格 (即分割的最大区间的长度). 记 $0=t_0<t_1<\cdots<$

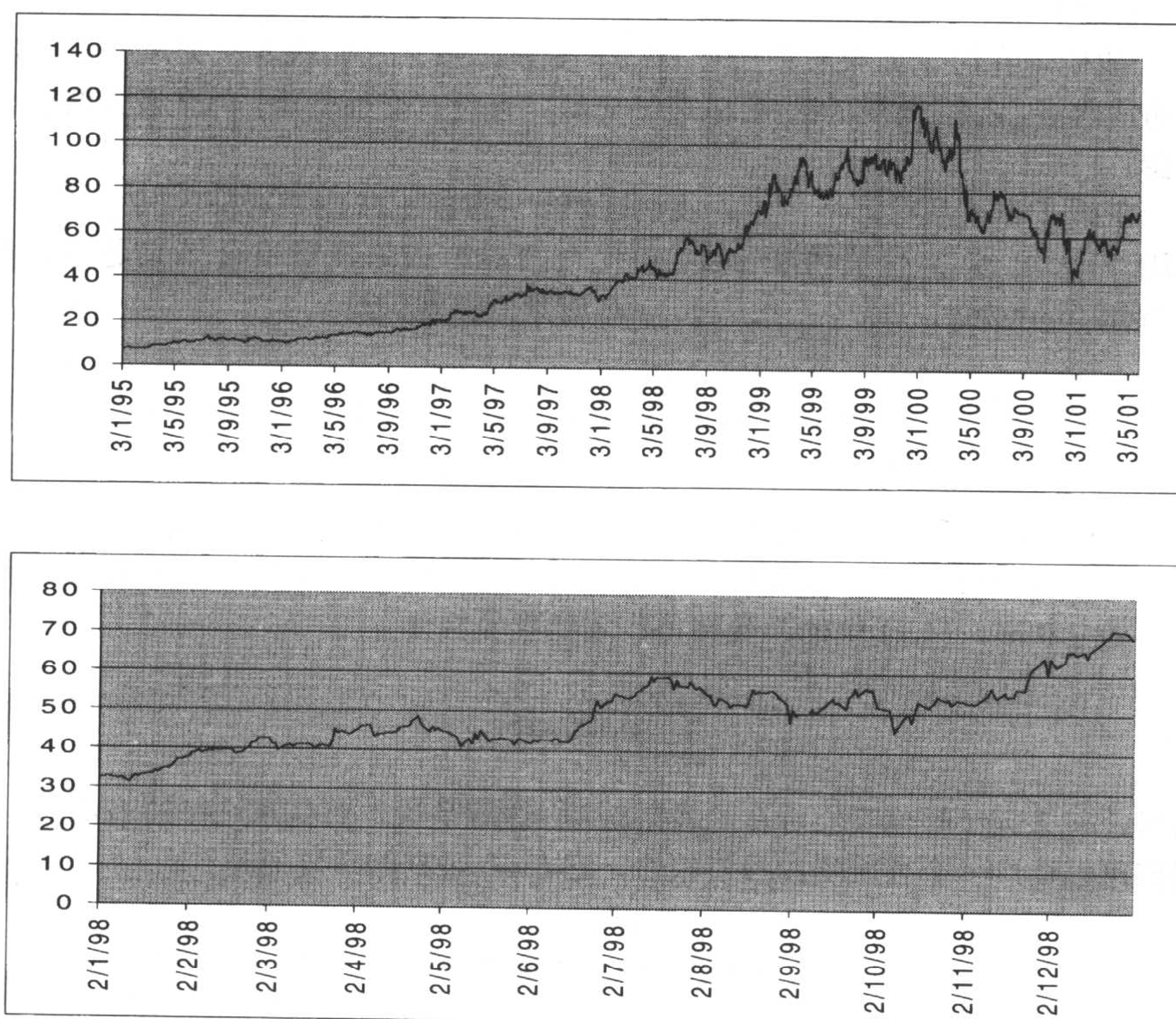


图 4-1: 长期 ($6\frac{1}{3}$ 年) 和短期 (1 年) 内不支付红利的股票的两幅图

$t_{N(\pi)} = T$ 为分割区间的端点. 那么, f 的变差是

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{\pi:\ \delta(\pi)=\delta}\sum_{j=1}^{N(\pi)} | f(t_j) - f(t_{j-1}) |\right\}.$$

如果这个函数是“好的”，比如它是可微的，那么，它有有界的变差，而“粗糙”的路径有无界的变差. 为了量化粗糙度，我们将变差的概念拓展到 p - 变差.

定义4.1.2 沿用定义 4.1.1 中的记号，函数 $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ 的 p - 变差定义为

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{\pi:\ \delta(\pi)=\delta}\sum_{j=1}^{N(\pi)} | f(t_j) - f(t_{j-1}) |^p\right\}.$$

注意，如果 $p>1$，那么比变差是有界的函数更粗糙的函数的 p - 变差是有限的. 例如，粗略地说，如果在间隔 δ 的区间内函数的变动是 $\sqrt{\delta}$，那么 2-变差是有限的.

有界变差和套利

我们现在讨论如果股票价格有有界变差，那么它们或者是无风险现金债券的常数倍, 或者 (假若我们可以连续交易并且没有交易费用) 存在极大的套利机会.

在第 2 章离散时间情形下，我们证明了 (方程 (2.5)) 在时间区间 $[i\delta t,(i+1)\delta t)$ 内，由 ϕ_{i+1} 份股票和 ψ_{i+1} 份现金债券组成的投资组合如果是自融资的 (self-financing)，那么它在 $N\delta t = T$ 时刻的贴现值是

$$\tilde{V}_N = V_0 + \sum_{j=0}^{N-1}\phi_{j+1}(\tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j). \tag{4.1}$$

这里，在 $j\delta t$ 时刻 ϕ_{j+1} 是已知的，但它通常是一个关于 $\tilde{S}_j$ 的函数. 在连续情形下，可以令交易间隔 δt 趋于 0，如果贴现的股票价格过程有有界变差，那么当 $\delta t\downarrow 0$ 时，(4.1) 中的黎曼和将收敛到黎曼积分

$$\int_0^T \phi_t(\tilde{S}_t)\mathrm{d}\tilde{S}_t.$$

这里，ϕ_t 表示 t 时刻我们持有的股票份额. 这就是说，对任意选择的 $\{\phi(\cdot)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，我们可以构造一个自融资的投资组合，它在 T 时刻的贴现值是

[73]

$$V_0 + \int_0^T \phi_t(\tilde{S}_t)\mathrm{d}\tilde{S}_t.$$

现在选择一个可微函数 $F(x)$，它在 $x = S_0$ 点附近的值很小而在其他地方的值很大. 那么通过在 0 时刻投资 $F(S_0)$，并拥有一份 t 时刻时具有 $\phi(\tilde{S}_t)$ 份股票

的自融资投资组合，这里，$\phi(x) = F'(x)$，我们构造的投资组合在 T 时刻的贴现值是

$$F(S_0) + \int_0^T F'(\tilde{S}_t)\mathrm{d}\tilde{S}_t.$$

由积分的基本定理可知，它是 $F(\tilde{S}_T)$.

我们不得不等待股票的贴现价格从 S_0 转变为更多的价值. 例如，在 t 时刻持有 $(\tilde{S}_t - \tilde{S}_0)$ 份股票的策略在 T 时刻能获得

$$\mathrm{e}^{rT}\int_0^T (\tilde{S}_t - \tilde{S}_0)\mathrm{d}\tilde{S}_t = \mathrm{e}^{rT}(\tilde{S}_T - \tilde{S}_0)^2$$

份的价值 (这里乘以 e^{rT} 消去贴现).

无套利情形下，我们并不希望股票价格路径有有界的变差. 事实上，正如 Lyons 指出的那样，L C Young 的讨论拓展了这个结果. 再次假定能够连续交易并无交易费用，对某些 $p < 2$，如果股票价格的路径有有限的 p - 变差，则可以获得任意大的收益.

4.2 随机积分

4.1 节的工作表明我们应该寻找这样一些模型，在模型中对 $p < 2$ 的股票价格有无限的 p - 变差. 用布朗运动做标准构件可以构造出许许多多这样的模型，但这需要一种新的微积分. 对于熟悉的牛顿微积分来说布朗运动的路径太粗糙了，对我们没有什么用处，甚至，即使它满足微积分基本定理，也将再次致使我们放弃把布朗运动作为模型的基础.

用来模拟股票价格的过程通常是一个或多个布朗运动的函数. 为了简单，这里我们限定它仅是一个布朗运动的函数. 我们应该做的首要事情就是写出股票价格演变的微分方程.

股票价格的微分方程

假定股票价格的形式为 $S_t = f(t, W_t)$. 利用泰勒定理 (并假定 f 至少是“好的”)，

$$\begin{aligned} f(t+\delta t, W_{t+\delta t}) - f(t, W_t) &= \delta t \dot{f}(t, W_t) + O(\delta t^2) + (W_{t+\delta t} - W_t) f'(t, W_t) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(W_{t+\delta t} - W_t)^2 f''(t, W_t) + \cdots \end{aligned}$$

这里我们使用记号

[74]

$$\dot{f}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x), \quad f'(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \ \text{和}\ f''(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

在我们通常链式法则的求导中，当 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 用一个有界的变差函数替代时，右边最后一项的阶数是 $O(\delta t^2)$. 然而，对布朗运动来说，我们知道 $\mathbb{E}[(W_{t+\delta t} -$

$W_t)^2]$ 是 δt. 因此，我们不能忽略包含二阶导数的项. 当然，现在有一个问题，因为我们必须解释包含一阶导数的项. 如果 $(W_{t+\delta t}-W_t)^2$ 是 $O(\delta t)$ 阶的，那么 $(W_{t+\delta t}-W_t)$ 应该是 $O(\sqrt{\delta t})$ 阶的，这能导致在有限的时间区间内 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 有极大的改变. 然而，事情并不是毫无希望的. $W_{t+\delta t}-W_t$ 的期望值是 0，并且在 0 点附近的波动是 $\sqrt{\delta t}$ 阶的. 与中心极限定理比较，S_t-S_0 是一个明确定义的随机变量似乎是合理的. 假定我们对比能给出严格描述，那么满足 $S_t=f(t,W_t)$ 的微分方程有如下形式

$$\mathrm{d}S_t=\dot{f}(t,W_t)\mathrm{d}t+f'(W_t)\mathrm{d}W_t+\frac{1}{2}f''(W_t)\mathrm{d}t.$$

为了方便，将它写成积分的形式，

$$S_t=S_0+\int_0^t\dot{f}(s,W_s)\mathrm{d}s+\int_0^t f'(W_s)\mathrm{d}W_s+\int_0^t\frac{1}{2}f''(W_s)\mathrm{d}s. \tag{4.2}$$

二次变差

为了使基于布朗运动的积分是有意义的，我们必须找到一个对方程 (4.2) 右端的随机积分(stochastic integral)(也就是第一个积分) 的严格的数学解释. 关键是研究布朗运动的二次变差(quadratic variation).

对一个典型的布朗路径，2- 变差是无限的. 然而，确实存在 2- 变差的一个稍弱的类似形式.

定理4.2.1 设 W_t 表示在 $\mathbb{P}$ 下的布朗运动，对 $[0,T]$ 的分割 π，定义

$$S(\pi)=\sum_{j=1}^{N(\pi)}|W_{t_j}-W_{t_{j-1}}|^2.$$

令 π_n 是一个分割序列，且 $\delta(\pi_n)\to 0$，则

$$\mathbb{E}\Big[|S(\pi_n)-T|^2\Big]\to 0 \quad 当 \ n\to\infty. \tag{4.3}$$

我们说用 $\{[W]_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示的布朗运动的二次变差过程是 $[W]_t=t$. 更一般地，我们可以定义与任意有界连续鞅相关的二次变差过程.

定义4.2.2 假定 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个有界连续的 $\mathbb{P}$ - 鞅，与 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 关联的二次变差过程是过程 $\{[M]_t\}_{t\geqslant 0}$，使得对 $[0,T]$ 的任意分割序列 π_n，$\delta(\pi_n)\to 0$，有

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{N(\pi)}|M_{t_j}-M_{t_{j-1}}|^2-[M]_T\right|^2\right]\to 0 \quad 当 \ n\to\infty. \tag{4.4}$$

75

注释 这里我们不证明它，但 (4.4) 式中的极限与分割序列无关. □

定理4.2.1的证明 我们展开 (4.3) 中期望内的表达式，并运用正态分布的知识. 设 $\{t_{n,j}\}_{j=0}^{N(\pi_n)}$ 表示构成分割 π_n 的区间的端点. 首先注意

$$|S(\pi_n)-T|^2=\left|\sum_{j=1}^{N(\pi_n)}\Big\{|W_{t_{n,j}}-W_{t_{n,j-1}}|^2-(t_{n,j}-t_{n,j-1})\Big\}\right|^2.$$

为了方便，记 $|W_{t_{n,j}}-W_{t_{n,j-1}}|^2-(t_{n,j}-t_{n,j-1})$ 为 $\delta_{n,j}$，那么

$$|S(\pi_n)-T|^2=\sum_{j=1}^{N(\pi_n)}\delta_{n,j}^2+2\sum_{j<k}\delta_{n,j}\delta_{n,k}.$$

注意，布朗运动有独立的增量，

$$\mathbb{E}[\delta_{n,j}\delta_{n,k}]=\mathbb{E}[\delta_{n,j}]\mathbb{E}[\delta_{n,k}]=0,\quad \text{如果}\ j\neq k.$$

此外

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta_{n,j}^2] &= \mathbb{E}[|W_{t_{n,j}}-W_{t_{n,j-1}}|^4\\ &\quad -2|W_{t_{n,j}}-W_{t_{n,j-1}}|^2(t_{n,j}-t_{n,j-1})+(t_{n,j}-t_{n,j-1})^2].\end{aligned}$$

对一个期望是 0 方差是 λ 的正态分布的随机变量 X，由第 3 章习题 5 知，

$$\mathbb{E}[|x|^4]=3\lambda^2,$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta_{n,j}^2] &= 3(t_{n,j}-t_{n,j-1})^2-2(t_{n,j}-t_{n,j-1})^2+(t_{n,j}-t_{n,j-1})^2\\ &= 2(t_{n,j}-t_{n,j-1})^2\\ &\leqslant 2\delta(\pi_n)(t_{n,j}-t_{n,j-1}).\end{aligned}$$

对 j 求和

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S(\pi_n)-T|^2] &\leqslant 2\sum_{j=1}^{N(\pi_n)}\delta(\pi_n)(t_{n,j}-t_{n,j-1})\\ &= 2\delta(\pi_n)T\\ &\to 0,\quad \text{当}\ n\to\infty.\end{aligned}$$

□

积分布朗运动

在古典方法里这个结果还不足以定义积分 $\int_0^T f(s,W_s)\mathrm{d}W_s$，但它足够允许我们从本质上模仿勒贝格 (Lebesgue) 积分的构造，把它作为简单函数的积分的极限，至少对满足 $\int_0^T\mathbb{E}[f^2(s,W_s)]\mathrm{d}s<\infty$ 的函数来说是这样，只要我们仅要求在 L^2 中这个极限存在. 即，如果 $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ 是一个收敛到 f 的阶梯函数的序列，那么，$\int_0^t f(s,W_s)\mathrm{d}W_s$ 是一个随机变量，对这个变量来说 [76]

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s,W_s)\mathrm{d}W_s-\int_0^t f^{(n)}(s,W_s)\mathrm{d}W_s\right|^2\right]\to 0,\quad \text{当}\ n\to\infty.$$

这与定义 4.2.2 中用二次变差的概念来替代 2 - 变差的概念是一致的.

尽管积分的构造可能看起来是熟悉的，但它的性质却大不相同. 首先，我

们通过定义 $\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s$ 来说明这点.

由古典积分理论，我们通常有

$$\int_0^T f(s,x_s)\mathrm{d}x_s = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f(t_j,x_{t_j})(x_{t_{j+1}} - x_{t_j}). \tag{4.5}$$

用同样的方法定义随机积分，即

$$\int_0^T W_s \mathrm{d}W_s \triangleq \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

但现在要注意的是这个极限可能只在 L^2 中存在.

再次考虑定理 4.2.1 中的量 $S(\pi)$.

$$\begin{aligned} S(\pi) &= \sum_{j=1}^{N(\pi)} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N(\pi)} \left\{(W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2) - 2W_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right\} \\ &= W_T^2 - W_0^2 - 2\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}). \end{aligned}$$

当 $\delta(\pi)\to 0$ 时, 左边收敛到 T(由定理 4.2.1)，因此令 $\delta(\pi)\to 0$，重新整理得到

$$\int_0^T W_s \mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_T^2 - W_0^2 - T).$$

注释 注意这并不是古典积分理论所得到的结果. 此随机积分中的额外项来自于 $\lim_{\delta(\pi)\to 0} S(\pi)$. □

定义积分 [77]

在公式 (4.5) 中， 用 $f(t_j,x_{t_j})$ 作为 f 在区间 $(t_j,t_{j+1}]$ 上的近似值，而在古典积分理论中，相应地可用区间中的任意一点代替 t_j，而取极限的结果是相同的. 在随机理论中将不再是这种情况. 习题 3 进一步要求计算下面两个极限:

(a)

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

(b)

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} \left(\frac{W_{t_j} + W_{t_{j+1}}}{2}\right)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

通过选择分割中每个子区间里的不同点，用 f 在这些点的值作为 f 在子区间上的值，我们得到不同的积分. 函数 $f(s, W_s)$ 关于 W_s 的伊藤积分定义为 (适于 $\mathbb{P}$-概率为零的集合)

$$\int_0^T f(s, W_s)\mathrm{d}W_s = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f(t_j, W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}). \tag{4.6}$$

斯特拉托诺维奇积分 (Stratonovich integral) 定义为

$$\int_0^T f(s, W_s)\circ \mathrm{d}W_s = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=1}^{N(\pi)} \left(\frac{f(t_j, W_{t_j}) + f(t_{j+1}, W_{t_{j+1}})}{2}\right)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

在 L^2 情形中这两个极限是可以理解的. 从计算角度来看，斯特拉托诺维奇积分具有保持牛顿微积分法则的优点，参看习题 8. 但从建模的角度来看，至少从我们的目的来看，它是个错误的选择. 为了找到原因，考虑在一个无限小的时间间隔内将会发生什么. 例如，可以构造一个投资组合. 在时间间隔的初始时刻重新调整我们的投资组合，而在无限小的时间间隔内它的价值将超出我们的控制范围. 在分别依赖于当前时刻股票价格和下一时刻股票价格这两种价值的平均值的基础之上，斯特拉托诺维奇模型允许我们改变现在的投资组合. 当我们做投资决定之时，我们没有这种信息.

我们简单重述着离散情况下所说的话，投资组合的构成是可预料的. 我们给出连续时间下的相似定义.

定义4.2.3 给定一个 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$，随机过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$-可料的或 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可测的，如果对所有的 t，X_t 是 $\mathcal{F}_{t-}$ - 可测的，这里

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s.$$

注释 如果 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ - 适应的并且左连续 (特别地，如果它是连续的)，那么 X_t 是自动可料的. □

在伊藤随机积分中，被积函数总是可料的.

简单函数的积分

我们仅在一个特殊的情形下, 即当被积函数本身是布朗运动时，来估计伊藤积分. 现在，通过首先考虑简单函数的积分，然后用古典背景中相同的方法来拓展我们的讨论. 我们总是假定 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 生成的 $\mathbb{P}$-布朗运动.

78

定义4.2.4 简单函数是一个具有如下形式的函数

$$f(s, \omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\mathbf{1}_{I_i}(s),$$

其中

$$I_i = (s_i, s_{i+1}], \qquad \bigcup_{i=1}^{n} I_i = (0,T], \qquad I_i \cap I_j = \{\emptyset\} \text{ 如果 } i \neq j$$

对每个 $i = 1, \ldots, n, a_i : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathcal{F}_{s_i}$ - 可测的随机变量，且 $\mathbb{E}[a_i(\omega)^2] < \infty$.

注释 暂时放弃我们不提及 Ω 的惯例. 然而，在我们的记忆里，a_i 是 W_{s_i} 的函数且 a_i 是 $\{W_r\}_{0\leqslant r\leqslant s_i}$ 的函数，这个 Ω 的符号对获取这两方面的关键信息是有益处的. 在我们的符号中，继续让 $\{W_s\}_{0\leqslant s\leqslant T}$ 不依赖于 ω. □

> **注意**: 我们定义的简单函数是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料的，一些书中称这样的函数为简单可料函数(simple predictable function).

如果 f 是一个简单函数，那么 $f(s,\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ 也是简单函数，定义

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s = \int f(s,\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathrm{d}W_s.$$

由 (4.6)，

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s_i)(W_{s_{i+1}\wedge t} - W_{s_i}).$$

现在，就像古典积分理论一样，对一个更一般的 (可测的) 函数 f，能找到一个简单函数序列 $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ ，使得当 $n\to\infty$ 时，$f^{(n)}\to f$, 并定义 f 关于 $\{W_s\}_{0\leqslant s\leqslant T}$ 的积分是 $\lim_{n\to\infty}\int f^{(n)}(s,\omega)\mathrm{d}W_s$，如果这个极限存在的话. 对任意的 f 这个并不一定成立. 接下来的引理有助于确认一个函数空间，对于此空间中的函数我们能适当地期望它们有好的极限.

引理4.2.5 假定 f 是一个简单函数，则

1. 过程

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s$$

79 是一个连续的 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，

2.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s,$$

3.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\leqslant T}\Big(\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s\Big)^2\Big] \leqslant 4\int_0^T \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s.$$

注释 第 2 个结论是著名的伊藤等距 (Itô isometry)，它表明应该可以将 $[0,t]$ 上的积分定义扩展到可料函数，使得 $\int_0^t \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s < \infty$. 而且，对这样的函数，以上 3 个结论仍然成立. 实际上，我们还可以将此定义再扩展一点，但此时积分可能就不是一个鞅了，而这个性质对我们来说很重要. □

在证明引理 4.2.5 之前，先引入一个著名的杜布不等式.

定理4.2.6 (杜布不等式) 如果 $\{M_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个连续鞅，那么

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} M_t^2\Big] \leqslant 4\mathbb{E}[M_T^2].$$

这个著名定理的证明在一些参考文献中可以找到，例如 Chung & Williams (1990).

引理4.2.5的证明 第 1 个结论的证明是习题 5，第 2 个结论应用杜布不等式可得到第 3 个结论，因此，我们仅证明第 2 个结论.

通过假定定义 4.2.4 中的符号简化符号

$$f(s,\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\mathbf{1}_{I_i}(s)$$

其中，区间 I_i 是互不相交的，且 $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (0,t]$. 由定义知

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})\Big)^2\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^2(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2\Big] \\ &\quad +2\mathbb{E}\Big[\sum_{i<j} a_i(\omega)a_j(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})(W_{s_{j+1}} - W_{s_j})\Big].\end{aligned}$$

假定 $j > i$，则由条件期望的塔 (tower) 性质 [80]

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[a_i(\omega)a_j(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})(W_{s_{j+1}} - W_{s_j})] \\ &= \mathbb{E}\Big[a_i(\omega)a_j(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})\mathbb{E}[(W_{s_{j+1}} - W_{s_j})|\mathcal{F}_{s_j}]\Big] = 0.\end{aligned}$$

而且，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[a_i^2(\omega)(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2] &= \mathbb{E}\Big[a_i^2(\omega)\mathbb{E}[(W_{s_{i+1}} - W_{s_i})^2|\mathcal{F}_{s_j}]\Big] \\ &= \mathbb{E}[a_i^2(\omega)](s_{i+1} - s_i).\end{aligned}$$

代入得

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s\Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[a_i^2(\omega)](s_{i+1}-s_i) = \int_0^t \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s$$

得证. □

记号: 记 $\mathcal{H}_T$ 为满足以下条件的函数 $f:\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}$ 的集合，对 $0\leqslant t\leqslant T$，$f(t,\omega)$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ - 可测的，并且

$$\int_0^T \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s<\infty.$$

伊藤积分的构造

这个是我们的可积函数类. 继续下去: 通过一个简单函数序列 $\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 来近似一个一般函数 $f\in\mathcal{H}_T$，定义

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}s \triangleq \lim_{n\to\infty}\int_0^t f^n(s,\omega)\mathrm{d}W_s.$$

81

下面的定理证实了上述结论是正确的.

定理4.2.7 假定 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$-布朗运动，令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示它的自然 σ - 域流. 存在一个线性映射 J，它把 $\mathcal{H}_T$ 映射到定义在区间 $[0,T]$ 上的连续 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅空间上，使得

1. 如果 f 是简单函数且 $t\leqslant T$，那么

$$J(f)_t=\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s,$$

2. 如果 $t\leqslant T$，那么

$$\mathbb{E}[J(f)_t^2]=\int_0^t \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s,$$

3.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} J(f)_t^2\Big]\leqslant 4\int_0^T \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s.$$

证 由杜布不等式，一旦知道 $\{J(f)_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个$\mathbb{P}$-鞅，则由第 2 个结论可得出第 3 个结论. 我们来定义 J，并证明前两个结论，按照前面的近似过程来进行.

令 $\{f^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ 是一个简单函数序列，使得

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t \Big|f(s,\omega)-f^n(s,\omega)\Big|^2\mathrm{d}s\Big]\to 0,\quad 当\ n\to\infty.$$

因为两个简单函数的差仍是简单函数，由引理 4.2.5

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(J(f^{(n)})_t - J(f^{(m)})_t\right)^2\right] \leqslant 4\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|f^{(n)}(s,\omega) - f^{(m)}(s,\omega)\right|^2\right]\mathrm{d}s \\ \to 0, \quad \text{当 } n,m\to\infty. \tag{4.7}$$

现在，定义 $J(f)_t$ 为 $\lim_{n\to\infty} J(f^{(n)})_t$，由 (4.7) 知对 $0\leqslant t\leqslant T$，这个极限一致存在，除了是在 $\mathbb{P}$- 概率为零的集上，这里我们令 $J(f)_t$ 等于 0，而且，

$$\mathbb{E}[J(f)_t^2] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[(J(f^{(n)})_t^2] = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \mathbb{E}[f^{(n)}(s,\omega)^2]\mathrm{d}s = \int_0^t \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}s.$$

仍然需要验证鞅性质.

现在，由詹生不等式 (见第 2 章习题 16)，它同样能很好的适用于条件期望，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[J(f^{(n)})_t|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[J(f)_t|\mathcal{F}_s]\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[J(f^{(n)})_t - J(f)_t|\mathcal{F}_s]^2\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|J(f^{(n)})_t - J(f)_t|^2|\mathcal{F}_s]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|J(f^{(n)})_t - J(f)_t|^2\right] \\ &\to 0, \quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}$$

因此，利用

$$J(f^{(n)})_s = \mathbb{E}[J(f^{(n)})_t|\mathcal{F}_s]$$

取极限

$$\mathbb{E}\left[\left(J(f)_s - \mathbb{E}[J(f)_t|\mathcal{F}_s]\right)^2\right] = 0.$$

这意味着

$$J(f)_s = \mathbb{E}[J(f)_t|\mathcal{F}_s], \quad \text{以概率}\mathbb{P}1\text{成立}.$$

这几乎是鞅性质，但我们想除去“几乎确实”的限定. 为了这个目的，选取一个 $J(f)$，使得鞅性质对所有的 $s,t\in\mathbb{Q}$ 成立 [通过在一个零 $\mathbb{P}$ 测度集上再次定义 $J(f)$ 可以做到这一点]. 由于 $J(f)$ 是连续函数的一致极限 (或者一致为零)，因此，它是连续的，利用这个定义，鞅性质对所有 s,t 成立. 得证. □

82

定义4.2.8 对 $f\in\mathcal{H}_T$，记

$$J(f)_t = \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s,$$

称这个量为 f 关于 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 的伊藤随机积分.

注意到可能除了在一个 $\mathbb{P}$- 概率为零的集合上，$J(f)$ 确实符合 (4.6) 的规定.

其他积分算子

我们定义了关于布朗运动的随机积分，它可以容易地扩展到能被写成 $X_t = W_t + A_t$ 的任何过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 上，这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动，$\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 是有界变差的一个连续过程. 在这种情况下，我们可以定义关于 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的积分为两部分的和: 关于布朗运动的积分加上关于 $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 的积分. 在古典意义下后一项存在. 也能用其他的鞅来替换布朗运动，这是我们的下一个目标.

假定 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，且对每个 $t > 0$，$\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$. 与关于布朗运动的伊藤积分类似，对一个简单函数

$$f(s,\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\mathbf{1}_{I_i}(s),$$

定义

$$\int f(s,\omega)\mathrm{d}M_s \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}).$$

通过极限，接着我们对所有的 $f \in \mathcal{H}_T^M$，定义

$$J^M(f)_t = \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}M_s$$

其中 $\mathcal{H}_T^M$ 是可料函数 $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的集合，使得

$$\int_0^T \mathbb{E}[f(s,\omega)^2]\mathrm{d}[M]_s < \infty.$$

如果有必要，可在零 $\mathbb{P}$-测度集上再次定义 $J^M(f)$ 为零，得到下面类似定理 4.2.7 的结论.

83

定理4.2.9 假定 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个有界连续的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$)- 鞅，且 $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$，对每个 $t > 0$. 那么存在一个从 $\mathcal{H}_T^M$ 到定义在 $[0,T]$ 上的连续的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅空间的线性映射 J^M，使得

1. 如果 f 是简单函数，则

$$J^M(f)_t = \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}M_s = \int f(s,\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathrm{d}M_s,$$

如上定义.

2. 如果 $t \leqslant T$，

$$\mathbb{E}[J^M(f)_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s,\omega)^2\mathrm{d}[M]_s\right],$$

这里 $\{[M]_t\}_{t\geqslant 0}$ 是与 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 有关的二次变差过程.

3.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} J^M(f)_t^2\right]\leqslant 4\mathbb{E}\left[\int_0^T f(s,\omega)^2\mathrm{d}[M]_s\right].$$

除了在 $\mathbb{P}$- 概率为零的集上，

$$\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}M_s=\lim_{\delta(\pi)\to 0}\sum_{i=0}^{N(\pi)-1} f(s_i,\omega)(M_{s_{i+1}}-M_{s_i}).$$

现在，进一步扩展积分定义，定义关于能被写成 $X_t = M_t + A_t$ 的任何过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的积分，其中，$\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续鞅 ($\mathbb{E}[M_t^2]<\infty$)，$\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个有界变差过程.

我们将在证明引理 4.2.11 中利用这个更加一般化的定义. 引理 4.2.11 是一个有用的结论，它告诉我们有界变差的鞅是常数.

定义4.2.10 假定 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续鞅，$\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个有界变差过程，则由 $X_t = M_t + A_t$ 定义的过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 被称为半鞅.

一个连续的半鞅是能以这种方式被分解的任意过程. 如果要求 $A_0 = 0$，那么这个分解是惟一的.

注释： 严格地，定义 4.2.10 中应该用“局部鞅”替换“鞅”，对更一般的做法，可参见 Ikeda & Watanabe (1989) 或 Chung & Williams (1990) 的文章.

引理4.2.11 令 $\{A_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 为一个连续 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$) - 鞅，且对每个 $0\leqslant t\leqslant T$，$\mathbb{E}[A_t^2]<\infty$，如果 $\{A_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 在 $[0,T]$ 上有有界变差，则

[84]

$$\mathbb{P}[A_t = A_0\ \ ,\ \ \forall t\in[0,T]]=1.$$

证 令 $\hat{A}_t = A_t - A_0$. 由于 $\{\hat{A}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是有界变差的一个连续过程，因此可用古典方法来定义积分 $\int_0^t \hat{A}_s\mathrm{d}\hat{A}_s$, 由微积分基本定理，

$$\hat{A}_t^2-\hat{A}_0^2=\hat{A}_t^2=2\int_0^t \hat{A}_s\mathrm{d}\hat{A}_s.$$

这个积分不管是作为古典积分来看还是作为随机积分来看是一样的，因此，由定理 4.2.9 知它是一个鞅，从而

$$\mathbb{E}\left[2\int_0^t \hat{A}_s\mathrm{d}\hat{A}_s\right]=0.$$

这样，对所有的 t, $\mathbb{E}[\hat{A}_t^2]=0$，所以，由 $\{\hat{A}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的连续性，$\mathbb{P}[\hat{A}_t = 0,\ \forall t\in[0,T]]=1$. 得证. □

4.3 伊藤公式

知道了随机积分的意义，现在我们来建立一些伊藤随机微分的法则. 首先建立链式法则和一些它的分支.

随机积分链式法则

定理4.3.1 (伊藤公式) f 使得偏导数 $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 存在且连续，并且 $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{H}$，对每个 t 几乎都成立，则有

$$\begin{aligned} f(t,W_t) - f(0,W_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,W_s)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,W_s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,W_s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

记号: 通常伊藤公式用微分符号记为

$$\mathrm{d}f(t,W_t) = f'(t,W_t)\mathrm{d}W_t + \dot{f}(t,W_t)\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}f''(t,W_t)\mathrm{d}t.$$

证明思路 为了避免太多繁琐的公式，假定 $\dot{f}_t \equiv 0$. (这个证明可以毫不困难地扩展到一般情况.) 则公式变为

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(W_s)\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(W_s)\mathrm{d}s. \tag{4.8}$$

[85] 令 π 是 $[0,t]$ 的一个分割，通常记 t_i, t_{i+1} 为一般区间的端点，那么

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (f(W_{t_{j+1}}) - f(W_{t_j})).$$

在分割的每个区间上应用泰勒定理，

$$f(W_t)-f(W_0) = \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(W_{t_j})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(\xi_j)(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^2,$$

其中点 $\xi_j \in [W_{t_j} \wedge W_{t_{j+1}}, W_{t_j} \vee W_{t_{j+1}}]$. 由布朗路径的连续性，可以将它写为

$$f(W_t)-f(W_0) = \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(W_{t_j})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(W_{\eta_j})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})^2,$$

其中 $\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$. 再将第二项写成

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (f''(W_{t_j}) + \epsilon_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2,$$

其中 $\epsilon_j = f''(W_{\eta_j}) - f''(W_{t_j})$.

特殊情形 假定 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 是有界的，那么，对每个固定的 T，由于 $r \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(W_r)$ 在 $[0,T]$ 上是一致连续的，当分割的间距趋于 0 时，$\sup_j \epsilon_j \to 0$. 现在我们仿照定理 4.2.1 的证明来做.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(W_{t_j})\Big((W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\Big)\right|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (f''(W_{t_j}))^2\Big((W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\Big)^2\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant i<j\leqslant N(\pi)-1} f''(W_{t_i})f''(W_{t_j})\Big((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\Big)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times \Big((W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 - (t_{j+1} - t_j)\Big)\right]. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

与前面一样，将条件作用于 $\mathcal{F}_{t_j}$，利用条件期望的塔性质，再结合 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 的有界性，可证明当分割的间距趋于 0 时，(4.9) 式的右边项趋于 0.

最后，利用

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} \frac{\partial f}{\partial x}(W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(W_s)\mathrm{d}W_s,$$

和连续性，我们看到如果 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 是有界的，那么公式 (4.8) 成立，除了在零$\mathbb{P}$-测度集上.

[86]

一般情况 为了去除 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 是有界的这一假设，我们可以利用所谓的“局部化序列”. 令

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| > n\}.$$

然后，用 $\{W_{s\wedge\tau_n}\}_{s\geqslant 0}$ 替换 $\{W_s\}_{s\geqslant 0}$，由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 连续，因此 $\left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(W_{s\wedge\tau_n})\right\}_{s\geqslant 0}$ 是一致有界的. 始终用 $W_{s\wedge\tau_n\, s\geqslant 0}$ 替换 $\{W_s\}_{s\geqslant 0}$ 来完成我们的证明. (注意为了做这项工作，我们需要这样的事实，即 τ_n 是一个停时.) 通过令 $n \to \infty$，可获得所有的结论. □

伊藤公式证明的所有细节可参见 Ikeda & Watanabe (1989) 或 Chung & Williams (1990).

例4.3.2 *利用伊藤公式计算* $\mathbb{E}[W_t^6]$.

解 通过 $Z_t = W_t^6$ 来定义 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$，那么由伊藤公式

$$\mathrm{d}Z_t = 6W_t^5\mathrm{d}W_t + 15W_t^4\mathrm{d}t.$$

和显然的 $Z_0 = 0$，积分形式为，

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t 6W_s^5 \mathrm{d}W_s + \int_0^t 15W_s^4 \mathrm{d}s.$$

随机积分的期望为 0 (由鞅性质)，因此

$$\mathbb{E}[Z_t] = \int_0^t 15\mathbb{E}[W_s^4]\mathrm{d}s.$$

现在由第 3 章中的习题 5(或本章习题 9) 可知，$\mathbb{E}[W_s^4] = 3s^2$，代入上式得

$$\mathbb{E}[W_t^6] = \mathbb{E}[Z_t] = 15\int_0^t 3s^2\mathrm{d}s = 15t^3.$$ □

几何布朗运动

连续时间中股票价格的基本参考模型是*几何布朗运动* (geometric Brownian motion)，定义为

$$S_t = S_0 \exp(\nu t + \sigma W_t), \tag{4.10}$$

其中，像通常一样，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是标准的 $\mathbb{P}$-布朗运动. 应用伊藤公式，

$$\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \mathrm{d}W_t + (\nu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t\mathrm{d}t.$$

[87] 这个表达式被称为 S_t 的*随机微分方程* (stochastic differential equation)，它通常记为这样的符号方程，即使写成积分方程也是有意义的.

引理4.3.3 *记 $\mu = \nu + \frac{\sigma^2}{2}$，前面定义的几何布朗运动过程是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅当且仅当 $\mu = 0$. 而且*

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 \exp(\mu t).$$

证 积分形式下的几何布朗运动的随机微分方程可写为

$$S_t = S_0 + \int_0^t (\nu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_s\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma S_s \mathrm{d}W_s. \tag{4.11}$$

注意到 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$)- 半鞅. 在这种特殊情况下，要证明它是一个鞅当且仅当 $\mu = 0$，相当于证明半鞅分解的惟一性，即它可惟一分解为一个鞅和一个有界变差过程.

假定 $\mu = 0$ (4.11) 式中的古典积分项为零，由于 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 沿袭了布朗运动的连续性，并由 (4.10) 知它是适应的，再由定义 4.2.3 后的注释知道它是可料的，因此由定理 4.2.7 可知，(4.11) 中的随机积分是一个鞅.

假定 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅 由于两个鞅 (关于同一 σ - 域流) 的差仍是一个鞅，由

$$A_t = S_t - S_0 - \int_0^t \sigma S_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t \mu S_s \mathrm{d}s$$

定义的 $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅. 这个古典积分有有界变差，因此由引理 4.2.11 可知，以概率 $1 A_t$ 等于 A_0，又由上式可知 $A_0=0$. 由于对所有的 s，$S_s>0$，故有 $\mu=0$.

88

期望 为了证明第二个结论，在 (4.11) 中的两边取期望，再次利用随机积分项是期望为 0 的鞅，得到

$$\mathbb{E}[S_t]-S_0=\mathbb{E}\left[\int_0^t \mu S_s \mathrm{d}s\right]=\int_0^t \mu\mathbb{E}[S_s]\mathrm{d}s.$$

(由古典积分理论可证，关于时间 t 的积分与期望是可以互换的.) 解此积分方程得

$$\mathbb{E}[S_t]=S_0\exp(\mu t).$$

证毕. □

几何布朗运动的伊藤公式

有了伊藤公式后就很方便，它允许我们直接用 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 来工作 (以便我们能写出 $f(t,S_t)$ 的随机微分方程). 现在知道了如何使我们原来探索性的计算严密化，因此我们用清晰的思路继续下去:

$$\begin{aligned}
& f(t+\delta t, S_{t+\delta t})-f(t,S_t)\\
\approx\ & \dot{f}(t,S_t)\delta t+f'(t,S_t)(S_{t+\delta t}-S_t)+\frac{1}{2}f''(t,S_t)(S_{t+\delta t}-S_t)^2\\
\approx\ & \dot{f}(t,S_t)\mathrm{d}t+f'(t,S_t)\mathrm{d}S_t\\
& +\frac{1}{2}f''(t,S_t)\{\sigma^2S_t^2\mathrm{d}W_t^2+\mu^2S_t^2\mathrm{d}t^2+2\sigma\mu S_t^2\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t\}.
\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}f(t,S_t)=\dot{f}(t,S_t)\mathrm{d}t+f'(t,S_t)\mathrm{d}S_t+\frac{1}{2}f''(t,S_t)\sigma^2S_t^2\mathrm{d}t,$$

这里我们使用乘法表

$\times$	$\mathrm{d}W_t$	$\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}W_t$	$\mathrm{d}t$	0
$\mathrm{d}t$	0	0

将此伊藤公式用积分形式给出

$$\begin{aligned}
f(t,S_t)-f(0,S_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u,S_u)\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(u,S_u)\mathrm{d}S_u\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,S_u)\sigma^2S_u^2\mathrm{d}u\\
&= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u,S_u)\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(u,S_u)\sigma S_u\mathrm{d}W_u\\
&\quad +\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(u,S_u)\mu S_u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,S_u)\sigma^2S_u^2\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

注意: 意识到关于 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 的随机积分将不再是一个关于概率测度 $\mathbb{P}$ 的鞅，在此概率测度下 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅，除了在特殊情况：当 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$-鞅，即当 $\mu=0$ 时，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 不是鞅. 为了实际计算，通过像最后一行那样展开“随机”积分来分离鞅，这种做法通常是明智的.

例4.3.4 假定 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是几何布朗运动且满足

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t, \tag{4.12}$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$ 下标准的布朗运动，计算 $\mathbb{E}[S_t^n], n\in\mathbb{N}$.

解 由上面的计算，

$$S_t=\exp(\nu t+\sigma W_t),$$

89 这里 $\nu=\mu-\frac{\sigma^2}{2}$，因此 $\{S_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 也是一个几何布朗运动，其参数为 $\nu^{(n)}=n\nu, \sigma^{(n)}=n\sigma$. 由引理 4.3.3 得

$$\mathbb{E}[S_t^n]=S_0^n\exp\left(\left(n\nu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2\right)t\right)=S_0^n\exp\left(\left(n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right)t\right). \tag{4.13}$$

为了用随机积分获得一些更多的练习，假设我们不知道如何将随机微分方程 (4.12) 的解明确地表示为一个 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 的函数. 粗略地说，一个可供选择的计算 $\mathbb{E}[S_t^n]$ 的方法是应用伊藤引理.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(S_t^n) &= nS_t^{n-1}\mathrm{d}S_t+\frac{1}{2}n(n-1)S_t^{n-2}\sigma^2S_t^2\mathrm{d}t\\ &= S_t^n\left(n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right)\mathrm{d}t+n\sigma S_t^n\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

将此方程写为积分形式，并两边取期望得

$$\mathbb{E}[S_t^n]-\mathbb{E}[S_0^n]=\int_0^t\left(n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right)\mathbb{E}[S_s^n]\mathrm{d}s.$$

这使得我们再次获得表达式 (4.13). □

布朗运动的莱维性质

伊藤公式对有关布朗运动的有用特征，即莱维特征的刻划提供了一个快捷的途径. 已经看到布朗运动是一个鞅，实际上当鞅是布朗运动时，伊藤公式有助于建立两者之间的一致性.

定理4.3.5 令 $\{W_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个连续的 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$) - 鞅，使得 $0\leqslant t\leqslant T$, $W_0=0, [W]_t=t$. 那么 $\{W_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$)- 布朗运动.

证 我们必须验证对任意的 $0\leqslant s<t\leqslant T$, W_t-W_s 是期望为 0 方差为 $t-s$ 的正态分布，且它与 $\mathcal{F}_s$ 独立.

令

$$M_t^\theta \triangleq \exp\left(\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t\right).$$

应用伊藤公式，我们看到 $\{M_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$) - 鞅，所以对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{M_t}{M_s}\middle|\mathcal{F}_s\right] = 1.$$

代入整理得

$$\mathbb{E}[\exp(\theta(W_t - W_s))|\mathcal{F}_s] = \exp\left(\frac{1}{2}(t-s)\theta^2\right).$$

因为正态分布以它的矩母函数为特性，所以结论得证. □ [90]

随机微分方程

回到形式为 $Z_t = f(t, W_t)$ 的过程，利用伊藤公式

$$\mathrm{d}Z_t = \left(\dot{f}(t, W_t) + \frac{1}{2}f''(t, W_t)\right)\mathrm{d}t + f'(t, W_t)\mathrm{d}W_t.$$

假设 f 是可逆的，则它可以写为

$$\mathrm{d}Z_t = \mu(t, Z_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, Z_t)\mathrm{d}W_t. \tag{4.14}$$

定义4.3.6 对某些在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上确定的函数 $\mu(t,x)$ 和 $\sigma(t,x)$，形式为 (4.14) 的方程称为 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 的随机微分方程.

通常，写出 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 的随机微分方程要比构造具体的函数 $f(t,x)$ 容易得多.

注意: 像 (牛顿) 常微分方程一样，一般地，随机微分方程没有解，即使有解，解也是不惟一的.

例如，若函数 $\mu(t,x)$ 和 $\sigma(t,x)$ 有界且关于 x 一致利普希茨连续，则存在惟一解，但这些条件当然是不必要的 [详细细节可以参看 Chung & Williams (1990) 和 Ikeda & Watanabe (1989)].

当然，我们应该真正地以积分形式理解方程 (4.14)，

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t \mu(s, Z_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, Z_s)\mathrm{d}W_s.$$

下面形式的伊藤公式的证明留给读者.

定理4.3.7 如果 $Z_t = f(t, W_t)$ 满足

$$\mathrm{d}Z_t = \sigma(t, Z_t)\mathrm{d}W_t + \mu(t, Z_t)\mathrm{d}t,$$

和

$$Y_t = g(t, Z_t),$$

对某些二次可微函数 f 和 g, 有

$$\mathrm{d}Y_t = \dot{g}(t, Z_t)\mathrm{d}t + g'(t, Z_t)\mathrm{d}Z_t + \frac{1}{2}g''(t, Z_t)\sigma^2(t, Z_t)\mathrm{d}t. \tag{4.15}$$

91

注释 注意到

$$M_t = Z_t - Z_0 - \int_0^t \mu(s, Z_s)\mathrm{d}s$$

是一个均值为 0 的鞅. 由伊藤等距，可知它的方差是

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, Z_s)^2\mathrm{d}s\right].$$

在 (4.15) 中出现的表达式 $\sigma^2(t, Z_t)\mathrm{d}t$ 正好是 $\mathrm{d}[M]_t$，这里 $\{[M]_t\}_{t\geqslant 0}$ 就是与 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 相关的二次变差.

如果 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由 $Z_t = M_t + A_t$ 来定义的，其中 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续鞅，且 $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$，$\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 有有界变差，则令 $Y_t = g(t, Z_t)$，我们有

$$\mathrm{d}Y_t = \dot{g}(t, Z_t)\mathrm{d}t + g'(t, Z_t)\mathrm{d}Z_t + \frac{1}{2}g''(t, Z_t)\mathrm{d}[M]_t.$$

特别地，把它应用到 $Y_t = M_t^2$ 上，可证 (习题 15)$M_t^2 - [M]_t$ 是一个鞅. □

解随机微分方程

即使随机微分方程有惟一解，它也很少能以闭式的形式表示成一个布朗运动的函数. 然而，如果能做到这点的话，那么伊藤公式提供了找到这样的解的一个途径.

例4.3.8 求解

$$\mathrm{d}X_t = X_t^3\mathrm{d}t - X_t^2\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 1. \tag{4.16}$$

解 如果 $X_t = f(t, W_t)$，则

$$\mathrm{d}X_t = \dot{f}(t, W_t)\mathrm{d}t + f'(t, W_t)\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}f''(t, W_t)\mathrm{d}t,$$

代入 (4.16)，

$$\mathrm{d}X_t = f(t, W_t)^3\mathrm{d}t - f(t, W_t)^2\mathrm{d}W_t.$$

使系数相等，得到

$$-f(t, W_t)^2 = f'(t, W_t)$$

和

$$\dot{f}(t, W_t) + \frac{1}{2}f''(t, W_t) = f(t, W_t)^3,$$

由此推出

$$f(t,x)=\frac{1}{x+c}$$

其中 c 是一个常数. 利用初始条件，可得

$$X_t=\frac{1}{W_t+1}.$$

注意到在有限时间内这个解过大了. □ 92

4.4 分部积分法和随机富比尼定理

为了处理随机积分，我们需要两个法则: 分部积分公式和“随机富比尼定理”. 前者是随机微分法则的产物，后者通常用于证明随机积分与古典积分的次序交换.

假设有两个随机微分方程:

$$\mathrm{d}Y_t=\mu(t,Y_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,Y_t)\mathrm{d}W_t,$$

$$\mathrm{d}Z_t=\tilde{\mu}(t,Z_t)\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}(t,Z_t)\mathrm{d}W_t.$$

假设这些方程是由同一布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 所导出的.

考虑由

$$M_t^Y=\int_0^t\sigma(s,Y_s)\mathrm{d}W_s \quad 和 \quad M_t^Z=\int_0^t\tilde{\sigma}(s,Z_s)\mathrm{d}W_s,$$

定义的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，相关的二次变差过程是

$$[M^Y]_t=\int_0^t\sigma^2(s,Y_s)\mathrm{d}s \quad 和 \quad [M^Z]_t=\int_0^t\tilde{\sigma}^2(s,Z_s)\mathrm{d}s.$$

显然 $\{M_t^Y\}_{t\geqslant 0}$ 与 $\{M_t^Z\}_{t\geqslant 0}$ 是不独立的，确定它们之间相关性的一种方法是通过它们的协方差来确定. 显然，$\{(M_t^Y+M_t^Z)\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{(M_t^Y-M_t^Z)\}_{t\geqslant 0}$ 都是 ($\mathbb{P}$,$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，它们相应的二次变差为 协方差

$$[M^Y\pm M^Z]_t=\int_0^t(\sigma(s,Y_s)\pm\tilde{\sigma}(s,Z_s))^2\mathrm{d}s.$$

我们对过程 $\{M_t^YM_t^Z\}_{t\geqslant 0}$ 感兴趣，用配极交换来处理它:

$$M_t^YM_t^Z=\frac{1}{4}\Big((M_t^Y+M_t^Z)^2-(M_t^Y-M_t^Z)^2\Big).$$

取期望,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^Y M_t^Z] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}\bigg[\int_0^t (\sigma(s,Y_s)+\tilde{\sigma}(s,Z_s))^2\mathrm{d}s - \int_0^t (\sigma(s,Y_s)-\tilde{\sigma}(s,Z_s))^2\mathrm{d}s\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \sigma(s,Y_s)\tilde{\sigma}(s,Z_s)\mathrm{d}s\bigg].\end{aligned}$$

记

$$[M^Y, M^Z]_t = \int_0^t \sigma(s,Y_s)\tilde{\sigma}(s,Z_s)\mathrm{d}s.$$

由于对 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅来说, $\{M_t^2 - [M]_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅 (习题 15), 再次利用配极交换, 我们看到 $\{M_t^Y M_t^Z - [M^Y, M^Z]_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅.

93

更一般地, 考虑由不同的布朗运动 (但不必是独立的) 推导出的随机微分方程. 例如, 假定

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= \mu(t,Y_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,Y_t)\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}Z_t &= \tilde{\mu}(t,Z_t)\mathrm{d}t + \tilde{\sigma}(t,Z_t)\mathrm{d}\tilde{W}_t,\end{aligned}$$

这里, 对某个 $0<\rho<1$, $\mathbb{E}[(W_t - W_s)(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)] = \rho(t-s)$, 这意味着推导这两个方程的布朗运动是正相关的, 一个增加另一个也随之增加, 但它们不是完全相同的. 像以前一样精确地定义 M_t^Y 和 M_t^Z, 并再次用配极交换来研究 $M_t^Y M_t^Z$. 记

$$[M_t^Y M_t^Z] = \frac{1}{4}\Big([M^Y + M^Z]_t - [M^Y - M^Z]_t\Big),$$

并利用二次变差的定义,

$$[M^Y, M^Z]_t = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (M_{t_{j+1}}^Y - M_{t_j}^Y)(M_{t_{j+1}}^Z - M_{t_j}^Z).$$

在我们的例子中, 假若 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 是连续的, 则有

$$[M^Y, M^Z]_t = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} \sigma(t_j, Y_{t_j})\tilde{\sigma}(t_j, Z_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(\tilde{W}_{t_{j+1}} - \tilde{W}_{t_j}),$$

并通过模仿定理 4.2.1 的证明中的讨论, 得到

$$[M^Y, M^Z]_t = \int_0^t \sigma(s,Y_s)\tilde{\sigma}(s,Z_s)\rho\mathrm{d}s.$$

定义4.4.1 对连续的 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$

$$[M,N]_t \triangleq \frac{1}{4}([M+N]_t - [M-N]_t)$$

称为 M 和 N 的相互变差或共变过程.

当然 $\{[M,M]_t\}_{t\geqslant 0}$ 是与 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 有关的二次变差过程. 在定义 4.4.1 的记号中，若记 $\delta(\pi)$ 为 $[0,t]$ 的一个一般分割，则

$$[M,N]_t = \lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})(N_{t_{j+1}} - N_{t_j}).$$

现在，我们具有了为处理半鞅的积所需的技巧.

定理4.4.2 (分部积分) 如果 $Y_t = M_t^Y + A_t^Y$ 和 $Z_t = M_t^Z + A_t^Z$，这里 $\{M_t^Y\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{M_t^Z\}_{t\geqslant 0}$ 是连续的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，且 $\{A_t^Y\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{A_t^Z\}_{t\geqslant 0}$ 是连续的有界变差过程，则

94

$$\mathrm{d}(Y_t Z_t) = Y_t \mathrm{d}Z_t + Z_t \mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}[M^Y, M^Z]_t.$$

证 对 $(Y_t + Z_t)^2$，Y_t^2 和 Z_t^2 应用伊藤公式，并从第一项中减去后两项即获得结论. □

例4.4.3 假设一种资产的英镑价格服从随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = \mu_1 S_t \mathrm{d}t + \sigma_1 S_t \mathrm{d}W_t$$

且 t 时刻 1 英镑的美元价值是 $\mathbb{E}_t$，这里

$$\mathrm{d}\mathbb{E}_t = \mu_2 \mathbb{E}_t \mathrm{d}t + \sigma_2 \mathbb{E}_t \mathrm{d}\tilde{W}_t.$$

则 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\tilde{W}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$- 布朗运动，且

$$\mathbb{E}\Big[(W_t - W_s)(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)\Big] = \rho(t-s)$$

对一些常数 $\rho > 0$ 成立.

如果在英国无风险利率是 r，在美国无风险利率是 s，分别在英镑市场和美元市场中寻找对于资产的贴现价格的随机微分方程. 参数取何值时资产的贴现价格在各自的市场中是鞅?

解 在英镑市场，记 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为股票的贴现价格，即 $\tilde{S}_t = \mathrm{e}^{-rt}S_t$. 由于函数 e^{-rt} 有有界变差，则由分部积分公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{S}_t &= -r\mathrm{e}^{-rt}S_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S_t \\ &= (\mu_1 - r)\tilde{S}_t\mathrm{d}t + \sigma_1\tilde{S}_t\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

在英镑市场，这是资产的贴现价格满足的随机微分方程，它的解是鞅当且仅当 $\mu_1 = r$.

记 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 为资产的美元价格，则 $X_t=\mathbb{E}_tS_t$，再次由分部积分得，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= \mathbb{E}_t\mathrm{d}S_t+S_t\mathrm{d}\mathbb{E}_t+\sigma_1\sigma_2\mathbb{E}_tS_t\rho\mathrm{d}t\\ &= (\mu_1+\mu_2+\rho\sigma_1\sigma_2)X_t\mathrm{d}t+\sigma_1X_t\mathrm{d}W_t+\sigma_2X_t\mathrm{d}\tilde{W}_t.\end{aligned}$$

在美元市场中，资产的贴现价格用 $\{\tilde{X}_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示，则有

$$\mathrm{d}\tilde{X}_t=(\mu_1+\mu_2+\rho\sigma_1\sigma_2-s)\tilde{X}_t\mathrm{d}t+\sigma_1\tilde{X}_t\mathrm{d}W_t+\sigma_2\tilde{X}_t\mathrm{d}\tilde{W}_t.$$

在美元市场中，贴现价格是一个鞅当且仅当

$$\mu_1+\mu_2+\rho\sigma_1\sigma_2-s=0.$$

注意到，资产的贴现价格极可能在某个市场中是鞅但在其他市场中却不是鞅，当在外汇交易市场中对期权定价 (见 5.3 节) 或对双重货币工具定价 (见 7.2 节) 时，记住这点是很重要的. □

95

一个随机富比尼定理

用一个更重要的结论来结束本节，这就是“随机富比尼定理”，它允许我们交换随机积分与古典积分的次序. 第 6 章习题 23 中在定价与某些路径相关的变异期权时，我们将需要这个结论.

用一个非常特殊的形式表述这个定理，它足以满足我们的需要，更一般的形式看 Ikeda & Watanabe(1989) 的文章.

定理4.4.4 令 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},\mathbb{P})$ 是一个过滤概率空间，并令 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续的 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，且 $M_0=0$. 假设 $\Phi(t,r,\omega)$:$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个有界的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料的随机变量，则对每个固定的 $T>0$，

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Phi(s,r,\omega)1_{[0,T]}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}M_s=\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\Phi(s,r,\omega)1_{[0,T]}(r)\mathrm{d}M_s\mathrm{d}r.$$

例4.4.5 假定 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$)- 布朗运动. 计算

$$Y_t\triangleq\int_0^tW_r\mathrm{d}r$$

的期望和方差.

解 古典富比尼定理告诉我们

$$\mathbb{E}[Y_t]=\mathbb{E}\Big[\int_0^tW_r\mathrm{d}r\Big]=\int_0^t\mathbb{E}[W_r]\mathrm{d}r=0.$$

困难之处是计算 $\mathbb{E}[Y_t^2]$. 令 $\Phi(s,r,\omega)=\mathbf{1}_{[0,r]}(s)$，利用随机富比尼定理得，

$$\begin{aligned}Y_t=\int_0^tW_r\mathrm{d}r &= \int_0^t\int_0^r1\mathrm{d}W_s\mathrm{d}r\\ &= \int_0^t\int_s^t1\mathrm{d}r\mathrm{d}W_s \qquad \text{(富比尼定理)}\\ &= \int_0^t(t-s)\mathrm{d}W_s.\end{aligned}$$

现在利用伊藤等距，我们能计算 $\mathbb{E}[Y_t^2]$ 为

$$\mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t (t-s)\mathrm{d}W_s\Big)^2\Big] = \int_0^t (t-s)^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}t^3.$$

□

4.5 Girsanov 定理

为了在 Black-Scholes 框架下定价和对冲，我们将需要两个基本的结论. 第一个结论允许我们变换概率测度，使得资产的贴现价格是鞅. 回忆在离散情况下，一旦有一个这样的**鞅测度** (martingale measure)，期权的定价便归结为在此测度下计算数学期望. 在连续情形下，不再可能通过线性代数找到鞅测度. 虽然如此，在表述连续时间结论之前，我们仍然采用二项式树模型.

96

使用第 2 章的记号. 假设在概率测度 $\mathbb{P}$ 下，若 $i\delta t$ 时刻的资产价值已知为 S_i，则它在 $(i+1)\delta t$ 时刻的价值以概率 p 变为 S_iu，且以概率 $1-p$ 变为 S_id.

在二项式树上变换概率

正如第 2 章中看到的那样，令 $\mathbb{Q}$ 是概率测度，如果在此概率测度下，上跳的概率为 $q=(1-d)/(u-d)$，下跳的概率为 $(u-1)/(u-d)$，那么过程 $\{S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-鞅.

可以把测度 $\mathbb{Q}$ 看作是测度 $\mathbb{P}$ 的一个**重新加权** (reweighting). 例如，考虑二项式树的一个路径 $S_0, S_1, \cdots, S_i$，在 $\mathbb{P}$ 下它的概率是 $p^{N(i)}(1-p)^{i-N(i)}$，其中 $N(i)$ 是这个路径中上跳的次数. 在 $\mathbb{Q}$ 下它的概率是 $L_ip^{N(i)}(1-p)^{i-N(i)}$，其中

$$L_i = \Big(\frac{q}{p}\Big)^{N(i)}\Big(\frac{1-q}{1-p}\Big)^{i-N(i)}.$$

显然，L_i 依赖随机过程通过二项式树的路径，它本身可被认为是一个适应于 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 的随机过程. 而且，若 $S_i/S_{i-1}=u$，则 $L_i/L_{i-1}=q/p$；若 $S_i/S_{i-1}=d$，则 $L_i/L_{i-1}=(1-q)/(1-p)$，因此

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_i|\mathcal{F}_{i-1}] = L_{i-1}\Big(p\frac{q}{p} + (1-p)\frac{1-q}{1-p}\Big) = L_{i-1}.$$

换句话说，$\{L_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_i\}_{0\leqslant i\leqslant N})$ - 鞅，且 $\mathbb{E}[L_i]=L_0=1$.

如果想计算$\mathbb{Q}$ -测度下的一种权益的期望值，则由下式给出

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_NC].$$

记号: 我们获得了 $\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym导数 (Radon-Nikodym derivative)，习惯上记为

$$L_i = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_i}.$$

连续情形下的测度变换 [97]

我们已经证明了鞅测度变换的过程可被视为在原来的测度 $\mathbb{P}$ 下路径概率关于一个正的期望为 1 的 $\mathbb{P}$- 鞅的重新加权. 这种关于一个正鞅的重新加权的程序可以拓展到连续集. 我们现在的目标是研究这样的重新加权对 $\mathbb{P}$- 布朗运动的分布有何影响. 随后，它能使我们选择正确的重新加权，以便在新测度下用这种方法获得的股票的贴现价格是一个鞅.

定理4.5.1(Girsanov定理) 假定 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，其自然 σ - 域流是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$，且 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 适应过程，使得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$$

定义

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s\right)$$

并且令 $\mathbb{P}^{(L)}$ 是由下式定义的概率测度

$$\mathbb{P}^{(L)}[A] = \int_A L_t(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

则在概率测度 $\mathbb{P}^{(L)}$ 下，由下式定义的过程 $\{W_t^{(L)}\}_{0\leqslant t\leqslant T}$

$$W_t^{(L)} = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$$

是一个标准的布朗运动.

记号: 记

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(L)}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = L_t.$$

(L_t 是 $\mathbb{P}^{(L)}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym导数.)

注释

1. 条件

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty,$$

就是已知的 Novikov 条件，它足以保证 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅. 因为 L_t 显然为正且期望为 1，所以 $\mathbb{P}^{(L)}$ 确实定义了一个概率测度.

2. 正如离散情形一样，如果两个概率测度有相同的零概率测度集，那么它们等价. 显然，$\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{P}^{(L)}$ 等价.

3. 如果想要计算关于 $\mathbb{P}^{(L)}$ 的期望，我们有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{(L)}}[\phi_t] = \mathbb{E}[\phi_t L_t].$$

更一般地，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{(L)}}[\phi_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\phi_t \frac{L_t}{L_s}\Big|\mathcal{F}_s\right].$$

这将是期权定价的基本原理. □ 98

证明思路 已经说过 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $(\mathbb{P}，\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，我们不详细地证明它，但需要通过寻找 L_t 满足的随机微分方程来获得支持它的依据. 我们分两个阶段来做，首先，定义

$$Z_t = -\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s.$$

则

$$\mathrm{d}Z_t = -\theta_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 \mathrm{d}t.$$

对 $L_t = \exp(Z_t)$ 应用伊藤公式.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_t &= \exp(Z_t)\mathrm{d}Z_t + \frac{1}{2}\exp(Z_t)\theta_t^2\mathrm{d}t \\ &= -\theta_t\exp(Z_t)\mathrm{d}W_t = -\theta_t L_t \mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

现在，利用定理 4.4.2 的分部积分公式求出 $W_t^{(L)}L_t$ 满足的随机微分方程. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_t^{(L)} &= \mathrm{d}W_t + \theta_t\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}(W_t^{(L)}L_t) &= W_t^{(L)}\mathrm{d}L_t + L_t\mathrm{d}W_t^{(L)} + \mathrm{d}[M^{W^{(L)}}, M^L]_t \\ &= W_t^{(L)}\mathrm{d}L_t + L_t\mathrm{d}W_t + L_t\theta_t\mathrm{d}t - \theta_t L_t\mathrm{d}t \\ &= \left(L_t - \theta_t L_t W_t^{(L)}\right)\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

假定足够有界 (由假设条件知这是可以保证的)，则 $\{W_t^{(L)}L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅，且期望为 0. 因此，在测度 $\mathbb{P}^{(L)}$ 下，$\{W_t^{(L)}\}_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅.

在定理 4.2.1 中已经证明 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 的二次变差 $\mathbb{P}$ 概率为 1 地满足 $[W]_t = t$. 因为概率测度 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{P}^{(L)}$ 等价，所以，它们有相同的 1 概率测度集. 因此 $\{W_t^{(L)}\}_{t\geqslant 0}$ 的二次变差也 $\mathbb{P}^{(L)}$ 概率为 1 地满足 $[W^{(L)}]_t = t$. 最后，由布朗运动的莱维特征 (定理 4.3.5)，知 $\{W_t^{(L)}\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}^{(L)}$- 布朗运动，结论得证. □

现在让我们在实际例子中应用它.

例4.5.2 令 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 为漂移的布朗运动过程

$$X_t = \sigma W_t + \mu t,$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，σ 和 μ 是常数，求一个测度，使得在此测度下 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅.

解 取 $\theta = \mu/\sigma$，在定理 4.5.1 中的 $\mathbb{P}^{(L)}$ 下，可知 $W_t^{(L)} = W_t + \mu t/\sigma$ 是一个布朗运动，则 $X_t = \sigma W_t^{(L)}$ 是一个有标度的布朗运动.

99

注意，例如

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^2] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sigma^2 W_t^2 + 2\sigma\mu t W_t + \mu^2 t^2] = \sigma^2 t + \mu^2 t^2,$$

而

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{(L)}}[X_t^2] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{(L)}}[\sigma^2 (W_t^{(L)})^2] = \sigma^2 t.$$

□

4.6 布朗鞅表示定理

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ 是一个过滤概率空间，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$)-布朗运动. 我们看到如果 $f(t,\omega)$ 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料的随机变量，且对每个 $t \geqslant 0, \mathbb{E}[f^2(t,\omega)] < \infty$，则

$$M_t \triangleq \int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}W_s$$

是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅. 自然要问是否还有其他的情况.

正如在离散情形中一样，二项式表示定理允许我们将鞅表示为“离散的随机积分”，因此这里布朗鞅表示定理告诉我们，所有 (好的)($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅都能被表示为伊藤积分. 这个结果有时也被称为可料表示性质 (predictable representation property)，它是连续情形下对冲的关键.

定义4.6.1 一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为是平方可积的，如果

$$\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty, \quad 对每个\ t > 0.$$

定理4.6.2 (布朗鞅表示定理) 令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$- 布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 的自然 σ - 域流，$\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个平方可积的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，则存在一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$，且它的 $\mathbb{P}$ 概率为 1，

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s.$$

证明思路 对某个固定的 T，只考虑 $t \in [0,T]$ 的情形. 第一步，对某些可料过程 $\{\theta_s\}_{0\leqslant s\leqslant T}$，证明任意满足 $\mathbb{E}[F^2]<\infty$ 的 $F\in\mathcal{F}_T$ 可表示为

$$F=\mathbb{E}[F]+\int_0^T \theta_s \mathrm{d}W_s \tag{4.17}$$

记 $\mathcal{G}$ 为能通过这种方式表示的所有 F 构成的线性空间. 对任意的 $F\in\mathcal{G}$， 100

$$\mathbb{E}[F^2]=\mathbb{E}[F]^2+\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_s^2 \mathrm{d}s\right]. \tag{4.18}$$

这保证了如果我们取 $\mathcal{G}$ 中的随机变量的序列 $\{F_n\}_{n\geqslant 1}$，它满足

$$\mathbb{E}[(F_n-F_m)^2]\to 0, \quad 当\ n,m\to\infty,$$

那么它们的极限也在 $\mathcal{G}$ 中. 现在由伊藤公式，对任意的简单函数

$$f(s)=\sum_{i=1}^n a_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(s),$$

如果定义

$$\varepsilon_t^f \triangleq \exp\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\mathrm{d}s\right),$$

则

$$\varepsilon_t^f=1+\int_0^t f(s)\varepsilon_s^f \mathrm{d}W_s.$$

换句话说，$\varepsilon_T^f\in\mathcal{G}$. 现在我们通过 ε_T^f 的线性组合来近似任意满足 $\mathbb{E}[F^2]<\infty$ 的 $F\in\mathcal{F}_T$ 而看到，由于所有这样的 F 都在 $\mathcal{G}$ 中，因此它可以表示成 (4.17) 式. (4.18) 本身保证了如果这种表示对两个不同的可料过程 $\{\theta_s\}_{0\leqslant s\leqslant T}$ 和 $\{\psi_s\}_{0\leqslant s\leqslant T}$ 均成立，则

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s-\psi_s)^2\mathrm{d}s\right]=0.$$

现在用鞅 $\{M_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 代替 $F\in\mathcal{F}_T$ 来完成证明. 这步比较初等，因为 $M_t=\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t]$，对 M_T 应用这种表示，然后两边取 (条件) 期望得

$$\begin{aligned}M_t=\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[M_T]+\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta_s \mathrm{d}W_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= \mathbb{E}[M_T]+\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s.\end{aligned}$$

□

详细证明参见 Revuz & Yor (1998).

注释

1. 鞅表示定理告诉我们，这样的 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ 存在. 不幸的是，不像二项式表示定理那样，它的证明不是构造性的. 第 5 章中在对冲期权方面应用它时，我们将不得不做更加艰难的工作，来实际产生一个可测过程的显式表达式.

2. 注意到鞅 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 的二次变差满足 $\mathrm{d}[M]_t = \theta_t^2 \mathrm{d}t$. 如果有两个布朗鞅 $\{M_t^{(1)}\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{M_t^{(2)}\}_{t\geqslant 0}$，假若 $\mathrm{d}[M^{(i)}]_t/\mathrm{d}t$ 不等于 0，i=1，2，那么鞅表示定理告诉我们，它们中的每一个是另一个的做了局部改变的变形. □

101

4.7 为何采用几何布朗运动

现在我们有了主要的结论，这些结论允许我们在基于布朗运动的股票市场模型中定价和对冲. 除了提出在无套利情形下股票价格的路径应该是粗糙的之外，我们根本没有提出采用这种模型的原因. 在这短短的一节中，我们利用布朗运动的莱维特征来导出金融数学中的基本参考模型：几何布朗运动.

首先粗略地描述一下巴舍利耶对布朗运动模型的讨论. 巴舍利耶认为股票市场不能有任何有利于买方或有利于卖方的偏好:

“投机者不要有任何指望”.

这几乎就是鞅性质. 假定股票价格过程有马尔可夫性质，他引入了转移密度

$$\mathbb{P}[S_t \in [y, y+\mathrm{d}y] | S_s = x] \triangleq p(s,t;x,y)\mathrm{d}y.$$

如果该动力系统在空间和时间上是齐次的，则对某些函数 q，有 $p\ (s,t;x,y) = q\ (t-s, y-x)$. 接着，巴舍利耶“推导”了现在众所周知的关于 q 的查普曼 - 科尔莫戈罗夫方程，并利用布朗运动的概率密度函数证明了此方程是有解的.

巴舍利耶的讨论是不严密的，但是由布朗运动的莱维特征知道，如果在 $\mathbb{P}$ 下股票价格过程是一个鞅，那么它的增量有固定的条件方差，则在 $\mathbb{P}$ 下股票价格过程必是布朗运动. 巴舍利耶的讨论早于爱因斯坦关于布朗运动的著名工作，当然也早于维纳过程的严格构造，他的贡献是相当卓越的.

尽管我们不对巴舍利耶分析的数学结果进行辩论，

102

但我们已经放弃了用布朗运动作为模型. 现代的方法采用了不同的假设条件，但我们完全没必要放弃巴舍利耶的讨论. 他的关键假设是股票价格过程的增量是平稳的，我们采用相对增量 $(S_t - S_s)/S_s$ 是不变的来代替它，意味着回报是平稳的. 取对数，过程 $\{\log S_t\}_{t\geqslant 0}$ 应该有平稳的增量. 我们并不知道 $\{\log S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅，因此此时我们只能推出它是布朗运动加一个常数漂移

项. 即

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，μ 和 σ 为常数. 这就是几何布朗运动模型，最早由 Samuelson (1995) 提出.

4.8 Feynman-Kac 表示定理

期权定价的概率方法将导致价格可表示为一种权益关于一个概率测度的贴现的期望值，在此概率测度下股票的贴现价格是鞅. 在欧式看涨和看跌期权的简单情况下，能得到价格的显式表达式. 然而，对较复杂的权益，不得不使用数值方法. 一种方法是重新回到二项式树模型，另一种方法是将价格表示为一个偏微分方程的解并求解，例如，有限差分方法. 实际上，对欧式期权来说，二项式树方法相当于求解 Black-Scholes 偏微分方程的有限差分方法. 这些数值方法请参阅 Wilmott，Howison & Dewynne (1995). 这里，我们简单地建立定价衍生产品所采用的偏微分方程方法和概率方法之间的关系.

价格可表示为一个偏微分方程的解， 这一事实是随机微分方程和某种抛物型偏微分方程紧密相联的结果.

解 PDE 的可能性

定理 4.8.1 (Feynman-Kac 随机表示定理) *假设函数 F 满足边值问题*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ F(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{4.19}$$

定义 $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 为如下随机微分方程的解，

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动. 如果

$$\int_0^T \mathbb{E}\Big[\Big(\sigma(t,X_t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\Big)^2\Big]ds < \infty, \tag{4.20}$$

则

$$F(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\Phi(X_T)|X_t = x].$$

证 对 $\{F(s,X_s)\}_{t\leqslant s\leqslant T}$ 应用伊藤公式，有

$$\begin{aligned} F(T,X_T) &= F(t,X_t) \\ &+ \int_t^T \Big\{\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + \mu(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,X_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\Big\}ds \\ &+ \int_t^T \sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)dW_s. \end{aligned} \tag{4.21}$$

利用假设 (4.20) 和定理 4.2.7，

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\mathrm{d}W_s\middle|X_t=x\right]=0.$$

[103] 而且，由于 F 满足 (4.19)，所以 (4.21) 右边的定积分为 0，因此取期望，

$$\mathbb{E}[F(T,X_T)|X_t=x]=F(t,x),$$

将 $F(T,X_T)=\Phi(X_T)$ 代入即得所需结论. □

例4.8.2 求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0,\\ F(T,x)=\Phi(x).\end{cases} \tag{4.22}$$

解 对应的随机微分方程是

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}W_t.$$

因此，由 Feynman-Kac 表示定理有

$$F(t,x)=\mathbb{E}[\Phi(W_T)|W_t=x].$$

实际上我们已经知道了这个结论. 在 3.1 节中我们写出了布朗运动的转移密度函数为

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right). \tag{4.23}$$

它给出

$$\mathbb{E}[\Phi(W_T)|W_t=x]=\int p(T-t,x,y)\Phi(y)\mathrm{d}y.$$

为了检验它是否真的是解，对它求导并利用 (4.23) 给出的 $p(t,x,y)$ 是下面方程的基本解的事实，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

[104] 可得到 (4.22). □

科尔莫戈罗夫方程

利用 Feynman-Kac 表示定理，可以得到偏微分方程，它可通过其他随机微分方程的解的转移密度函数来求解.

假设

$$\mathrm{d}X_t=\mu(t,X_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\mathrm{d}W_t. \tag{4.24}$$

对任意集 B，令

$$p_B(t,x;T,y)\triangleq\mathbb{P}[X_T\in B|X_t=x]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X_T)|X_t=x].$$

利用 Feynman-Kac 表示定理 [服从可积条件 (4.20)] 求解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_B}{\partial t}(t,x;T,y) + Ap_B(t,x;T,y) = 0, \\ p_B(T,x) = \mathbf{1}_B(x). \end{cases} \tag{4.25}$$

这里

$$Af(t,x) = \mu(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x).$$

记 $|B|$ 为集 B 的勒贝格测度，过程 $\{X_s\}_{s\geqslant 0}$ 的转移密度为

$$p(t,x;T,y) \triangleq \lim_{|B|\to 0}\frac{1}{|B|}\mathbb{P}[X_T \in B|X_t = x].$$

由于方程 (4.25) 是线性的，因此我们证明了下面的引理.

引理4.8.3 假设条件 (4.20) 成立，随机微分方程 (4.24) 的解 $\{X_s\}_{s\geqslant 0}$ 的转移密度函数是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}(t,x;T,y) + Ap(t,x;T,y) = 0, \\ p(t,x;T,y) \to \delta_y(x), \quad 当 \quad t\to T时, \end{cases} \tag{4.26}$$

的解.

方程 (4.26) 是倒向科尔莫戈罗夫方程(Kolmogorov backward equation)[它对“时间倒向”变量 (t,x) 进行运算]. 算子 A 称为过程 $\{X_s\}_{s\geqslant 0}$ 的无穷小生成元(infinitesimal generator).

我们也可以获得关于前向(forward) 变量 (T,y) 的方程.

引理4.8.4 在上面的记号中，

$$\frac{\partial p}{\partial T}(t,x;T,y) = A^*p(t,x;T,y), \tag{4.27}$$

这里

$$A^*f(T,y) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(T,y)f(T,y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(t,Y)f(T,y)).$$

启发性解释 我们不证明该引理，但要给出一些说明. 利用过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的马尔可夫性质，对任意的 $T > r > t$，

$$p(t,x;T,y) = \int p(t,x;r,z)p(r,z;T,y)\mathrm{d}z.$$

关于 r 求导并利用 (4.26)， 105

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}p(t,x;r,z)p(r,z;T,y) + p(t,x;r,z)Ap(r,z;T,y)\right\}\mathrm{d}z = 0.$$

对第二项分部积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}p(t,x;r,z)-A^{*}p(t,x;r,z)\right\}p(r,z;T,y)\mathrm{d}z=0.$$

对所有的 $T>r$ 此式均成立，如果当我们改变 T 时 $p(r,z;T,y)$ 提供了足够多的函数类，则它意味着该结论成立. □

方程 (4.27) 是过程 $\{X_s\}_{s\geqslant 0}$ 的前向科尔莫戈罗夫方程(Kolmogorov forward equation).

例4.8.5 求出几何布朗运动的前向和倒向科尔莫戈罗夫方程.

解 随机微分方程是

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t.$$

将它代入前向方程得

$$\frac{\partial p}{\partial T}(t,x;T,y)=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^2p(t,x;T,y)\right)-\mu\frac{\partial}{\partial y}(yp(t,x;T,y)),$$

代入倒向方程得

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x;T,y)=-\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x;T,y)-\mu x\frac{\partial p}{\partial x}(t,x;T,y).$$

此过程的转移密度函数是对数正态分布密度函数，即

$$p(t,x;T,y)=\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{\left(\log(y/x)-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right).\quad\square$$

例4.8.6 假设 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是方程

$$\mathrm{d}X_t=\mu(t,X_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\mathrm{d}W_t,$$

的解. 这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$- 布朗运动. k: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 Φ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是给定的确定函数，求函数

$$F(t,x)\triangleq\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T k(s,X_s)\mathrm{d}s\right)\Phi(X_T)\middle|X_t=x\right],$$

106 满足的偏微分方程，$0\leqslant t\leqslant T$.

解 显然 $F(T,x)=\Phi(x)$. 类似于 Feynman-Kac 表示的证明，我们必须去验证

$$Z_s=\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)\mathrm{d}u\right)F(s,X_s)$$

是个动力系统. 注意到如果 $X_t = x$,$\{Z_s\}_{t\leqslant s\leqslant T}$ 的选择为

$$Z_t = F(t,x) = \mathbb{E}[Z_T|X_t = x].$$

因此，$F(t,x)$ 满足的偏微分方程就是 $\{Z_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 满足的偏微分方程，$\{Z_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个鞅.

现在，我们的策略是寻求 $\{Z_s\}_{t\leqslant s\leqslant T}$ 满足的偏微分方程. 分两步进行，记住 t 现在是固定的，我们改变 s. 首先，注意到

$$\mathrm{d}\left(\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)\mathrm{d}u\right)\right) = -k(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

并由伊藤公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(s,X_s) &= \frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s)\mathrm{d}s + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\sigma^2(s,X_s)\mathrm{d}s \\
&= \left\{\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + \mu(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,X_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\right\}\mathrm{d}s \\
&\quad +\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

利用分部积分公式得:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_s &= \exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)\mathrm{d}u\right) \times \left\{\left\{-k(s,X_s)F(s,X_s)\right.\right. \\
&\quad \left. +\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + \mu(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,X_s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right\}\mathrm{d}s \\
&\quad \left. +\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\mathrm{d}W_s\right\}.
\end{aligned}$$

现在我们可以得到解，由于 $\{Z_s\}_{t\leqslant s\leqslant T}$ 是一个鞅，所以 F 必定满足:

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,x) + \mu(s,x)\frac{\partial F}{\partial x}(s,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,x) - k(s,x)F(s,x) = 0. \quad \square$$

习 题

1. 令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示与标准 $\mathbb{P}$- 布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 有关的自然 σ - 域流. 用 $S_t = f(t,W_t)$ 定义过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$. 如果 S_t 是一个 $(\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，那么 f 必须满足什么方程？如果 $\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$，利用你的答案检验

$$S_t = \exp(\nu t + \sigma W_t)$$

107 是一个鞅. (参看引理 4.3.3).

2. 称函数 f 在 $[0,T]$ 上是利普希茨连续的(Lipschitz continuous)，如果存在一个常数 $C>0$，使得对任意 t , $t'\in[0,T]$，有

$$|f(t)-f(t')|<C|t-t'|.$$

证明利普希茨连续函数有有界变差，且在 $[0,T]$ 上有零 2 - 变差.

3. 令 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，对 $[0,T]$ 的一个分割 π ，记 $\delta(\pi)$ 为分割的网格，$0=t_0<t_1<\cdots<t_{N(\pi)}=T$ 为分割区间的端点，计算

(a)

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0}\sum_{0}^{N(\pi)-1}W_{t_j+1}(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}).$$

(b)

$$\int_0^T W_s\circ \mathrm{d}W_s\triangleq\lim_{\delta(\pi)\to 0}\sum_{0}^{N(\pi)-1}\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}}+W_{t_j})(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}).$$

这是 $[0,T]$ 上 $\{W_s\}_{s\geqslant 0}$ 关于自身的斯特拉托诺维奇积分(Stratonovich integral).

4. 假设鞅 $\{M_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 有有界二次变差，$\{A_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是利普希茨连续的. 令 $S_t=M_t+A_t$，类似于定义 4.2.2，定义 $[0,T]$ 上 $\{S_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的二次变差为随机变量 $[S]_T$，使得对 $[0,T]$ 上的任意分割序列 $\{\pi_n\}_{n\geqslant 1}$，且当 $n\to\infty$ 时，$\delta(\pi)\to 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{N(\pi)}\mid S_{t_j}-S_{t_{j-1}}\mid^2-[S]_T\right|^2\right]\to 0,\quad 当\ n\to\infty,$$

证明 $[S]_T=[M]_T$.

5. 如果 f 是一个简单函数，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，证明由伊藤积分

$$M_t=\int_0^t f(s,W_s)\mathrm{d}W_s$$

给出的过程 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅.

6. 如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，证明

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t W_s\mathrm{d}W_s\right)^2\right]=\int_0^t\mathbb{E}[W_s^2]\mathrm{d}s.$$

108 (如果需要 W_t 的矩母函数，可以采用习题 10 的结果.)

7. 像通常一样，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，利用伊藤公式写出下列量的随机微分方程.

(a) $Y_t=W_t^3$,

(b) $Y_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$,

(c) $Y_t = tW_t$.

问哪个是 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅?

8. 采用以泰勒展开式为基础的论证，检验对斯特拉托诺维奇随机积分来说，链式法则采取了古典 (牛顿) 链式法则的形式.

9. 模仿例 4.3.2 的计算，证明如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是概率测度 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，则 $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$.

10. 令 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，定义 $Z_t = \exp(\alpha W_t)$. 利用伊藤公式写出 Z_t 满足的随机微分方程，因此求出 $m(t) \triangleq \mathbb{E}[Z_t]$ 满足的常 (确定的) 微分方程，并通过求解它来证明

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha W_t)] = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}t\right).$$

11. 令 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，Ornstein-Uhlenbeck过程$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是*郎之万方程*

$$\mathrm{d}X_t = -\alpha X_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x.$$

的惟一解. 这个方程最初是作为对于悬浮在液体里的粒子速度的一个简单的理想模型而引入的. 在金融中，它是利率的 Vasicek 模型的一个特殊情况 (见习题 19). 证明

$$X_t = \mathrm{e}^{-\alpha t}x + \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{d}W_s,$$

并利用这个表达式计算 X_t 的期望和方差.

12. 利率的 Cox-Ingersoll-Ross模型假定利率 r 不确定，但它满足随机微分方程

$$\mathrm{d}r_t = (\alpha - \beta r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t,$$

这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是标准 $\mathbb{P}$- 布朗运动. 这个过程被认为是平方贝塞尔过程. 在 $\alpha = 0$ 时，求 $\{\sqrt{r_t}\}_{t\geqslant 0}$ 满足的随机微分方程.

假设 $\{u(t)\}_{t\geqslant 0}$ 对某些常数 $\theta > 0$ 满足常微分方程 109

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -\beta u(t) - \frac{\alpha^2}{2}u(t)^2, \qquad u(0) = \theta.$$

固定 $T > 0$，仍然假定 $\alpha = 0$，对 $0 \leqslant t \leqslant T$，求

$$\mathbb{E}[\exp(-u(T-t)r_t)]$$

满足的微分方程. 因此计算 r_T 的期望和方差，并计算 $\mathbb{P}[r_T = 0]$.

13. 利率的 Black-Karasinski模型是

$$\mathrm{d}r_t = \sigma_t r_t \mathrm{d}W_t + \left(\theta_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \alpha_t \log r_t\right) r_t \mathrm{d}t,$$

这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是标准 $\mathbb{P}$- 布朗运动，σ_t, θ_t 和 α_t 是时间的确定函数，特殊情况下，σ，θ 和 α 是常数，求 r_t，使得它是 $\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{d}W_s$ 的函数.

14. 假设在测度 $\mathbb{P}$ 下，

$$\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$- 布朗运动. 求

$$Y_t \triangleq \int_0^t S_u \mathrm{d}u$$

的期望和方差.

15. 假定 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个连续的 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅，且对所有 $t \geqslant 0$，$\mathbb{E}[M_t^2]$ 有限. 记 $\{[M]_t\}_{t\geqslant 0}$ 为相应的二次变差过程，证明 $M_t^2 - [M]_t$ 是一个 ($\mathbb{P}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$) - 鞅.

16. 假设在概率测度 $\mathbb{P}$ 下 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个布朗运动，其漂移率为常数 μ，找出一个与 $\mathbb{P}$ 等价的测度 $\mathbb{P}^*$，在 $\mathbb{P}^*$ 下，$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个漂移率为 ν 的布朗运动.

17. 令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是与 $\mathbb{P}$- 布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 相关的自然 σ - 域流，证明如果 X 是 $\mathcal{F}_T$ - 可测的随机变量，且 $\mathbb{E}[|X|] < \infty$，$\mathbb{P}^*$ 是与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度，则过程

$$M_t \triangleq \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[X|\mathcal{F}_t]$$

是一个 $(\mathbb{P}^*, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T})$- 鞅.

18. 利用 Feynman-Kac 随机表示公式求

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0,$$

满足终值条件

$$F(T,x) = x^4.$$

110

的解.

19. 假设利率 r 不确定，但它本身是一个随机过程 $\{r_t\}_{t\geqslant 0}$. 在 Vasicek模型中，$\{r_t\}_{t\geqslant 0}$ 被假定为随机微分方程

$$\mathrm{d}r_t = (b - ar_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

的解，这里，像通常一样，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是标准 $\mathbb{P}$- 布朗运动.

求此过程的概率密度函数满足的倒向和前向科尔莫戈罗夫方程，当 $t \to \infty$ 时，r_t 的分布是什么？

20. 假设 $v(t,x)$ 是

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - rv(t,x) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

的解，证明对于任意常数 θ，

$$v_\theta(t,x) \triangleq \frac{x}{\theta}v(t,\frac{\theta^2}{x})$$

是方程的另一个解. 利用 Feynman-Kac 随机表示定理给出这个结果的概率解释.

21. 假设对于 $0 \leqslant s \leqslant T$，

$$\mathrm{d}X_s = \mu(s,X_s)\mathrm{d}s + \sigma(s,X_s)\mathrm{d}W_s, \qquad X_t = x,$$

这里 $\{W_s\}_{t\leqslant s\leqslant T}$ 是 $\mathbb{P}$- 布朗运动，令 k，Φ：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是给定的确定的函数，求

$$F(t,x) = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|X_t = x] + \int_t^T \mathbb{E}[k(X_s)|X_t = x]\mathrm{d}s$$

满足的偏微分方程. 111

第 5 章　Black-Scholes 模型

引　言

现在，终于可以利用需要的所有工具对连续情形下的 Black-Scholes 模型进行定价和对冲. 首先给出最基本的假设，假设市场上有两种有价证券：现金债券和风险资产，其中风险资产价格遵循几何布朗运动.

在 5.1 节中，我们在 Black-Scholes 模型框架下证明资产定价基本定理. 与离散情形中的分析一致，将给出衍生产品定价的显示表达式，成为鞅测度下贴现的期望收益. 和离散情形一样，也有复制三步骤. 在 5.2 节中，我们用同样的方法来研究欧式期权. 对于简单的看涨和看跌期权，能估计给定的权益价格的期望. 通过应用 Feynman-Kac 表示定理，也可以得到在复制投资组合里所持股票和债券的显示表达式.

本书余下部分包含的衍生产品合约和市场模型更加复杂. 着手研究这部分内容之前，先放宽基本 Black-Scholes 模型中的一些金融假设. 我们已经明确的风险资产有简单的金融意义. 已经假设它在没有额外费用和利润的情形下被持有并可按照定价进行自由贸易. 即使不考虑交易费用和偿付能力，大部分的金融市场亦非如此. 外汇包括两种支付利率的资产：支付红利的股权和支付息票的债券. 在 5.3 ~ 5.5 节中，我们将看到在有着更复杂的金融背景下如何利用 Black-Scholes 模型的定价方法进行定价. 最后，在 5.6 节中，我们讨论在一个确定的市场里可交易资产的性质，并定义风险的市场价格.

5.1　基本 Black-Scholes 模型

这一节我们将严格推导 2.6 节中给出的 Black-Scholes 定价公式. 就像第 2 章中一样，假设市场上有两种有价证券. 一种是经常提到的现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$. 这里仍然假设无风险利率是常数，因此如果 $B_0=1$，那么 $B_t=\mathrm{e}^{rt}$. 另一种市场证券是风险资产，用 S_t 表示风险资产在 t 时刻的价

112

格. 在这里的基本参考模型中，假设 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 遵循几何布朗运动，即它满足随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

这里 μ, σ 是常数，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$ - 布朗运动. 注意到这相当于在 2.6 节的计算中取 $\nu = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. 称 $\mathbb{P}$ 为市场测度 (market measure). 同离散情形完全一样，市场测度告诉我们事件发生的概率是正的，但是我们对以定价和对冲为目的的事件发生的概率还应重新加权.

自融资策略

正如离散情形，我们的着眼点是不允许市场存在任何套利机会.采用的策略也和第 2 章中一样: 为了根据 T 时刻的权益价格 C_T 得到零时刻的权益价格，我们要寻找一个自融资的投资组合，它在 T 时刻的价值恰好是 C_T. 在无套利的情况下，权益价值必定与构造的复制投资组合的价值相等. 当然为了使这个论点是可行的，这种投资组合的交易策略一定是可料的 (previsible). 而且，因为现在允许随时地调整投资组合，而并不只是在那些观察“时刻”进行，为避免存在明显的套利机会，必须对投资组合的可允许交易策略给出进一步的限制. 下面举例说明.

例5.1.1[**加倍策略 (doubling strategy)**] 考虑下面的赌博策略: 连续 (独立地) 投掷一枚硬币，正面朝上的概率 $p > 0$. 以 K 美元作为赌注去赌第一次掷出的硬币正面朝上. 如果正面朝上，那么赌博结束，赢得 K 美元; 如果背面朝上，那么就再以 $2K$ 美元作为第二次掷硬币的赌注. 同样如果正面朝上，那么赌博结束，净赚 K 美元，否则将损失 $3K$ 美元，接着再以 $4K$ 美元作为下一次正面朝上的赌注. 如此继续下去. 如果前 $n-1$ 次所有的都是背面朝上，那么损失为 $\sum_{j=0}^{n-1} 2^j K = (2^n - 1)K$ 美元，再以 $2^n K$ 美元作为第 n 次的赌注. 因为硬币正面朝上必然发生，故可确保赢得 K 美元. 当然，这种套利的产生依赖于拥有无限的资金. 如果只有有限的资金，那么这种表面上的套利机会将不存在.

由这个例子，给出下面的定义.

定义5.1.2 一对可料过程 $\{\psi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，$\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 分别表示投资组合在 t 时刻无风险资产和风险资产的份额，如果对所有的 $t \in [0,T]$ 以概率 1 满足 [113]

1. $$\int_0^T |\psi_t| \mathrm{d}t + \int_0^T |\phi_t|^2 \mathrm{d}t < \infty,$$

2. $$\psi_t B_t + \phi_t S_t = \psi_0 B_0 + \phi_0 S_0 + \int_0^t \psi_u \mathrm{d}B_u + \int_0^t \phi_u \mathrm{d}S_u,$$

则称 $\{\psi_t, \phi_t\}$ 是自融资策略.

注释 条件 1 保证了条件 2 中的积分有意义. 而且，$\int_0^t \phi_u \mathrm{d}W_u$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅.

对条件 2 两边微分，t 时刻的投资组合 $V_t(\psi,\phi)=\psi_tB_t+\phi_tS_t$ 满足

$$dV_t(\psi,\phi)=\psi_t dB_t+\phi_t dS_t.$$

即，在无穷小的时间段上的投资组合价值的变化完全取决于资产价值的变化，而不是由于从外面流入 (或抽走) 资金. □

同离散情形一样，问题的关键是研究概率测度 $\mathbb{Q}$ 与 "市场测度" $\mathbb{P}$ 的等价性，并在此测度下，贴现的股票价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{Q}$ - 鞅. 这就意味着将资产价格的贴现价格过程当作主要关注的对象是很方便的. 基于这种思想，我们证明下面与方程 (2.5) 类似的连续情形.

引理5.1.3 设 $\{\psi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，$\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可料过程，且满足

$$\int_0^T |\psi_t| dt+\int_0^T |\phi_t|^2 dt<\infty \quad (\text{以概率 } 1).$$

令

$$V_t(\psi,\phi)=\psi_tB_t+\phi_tS_t,\qquad \tilde{V}_t(\psi,\phi)=e^{-rt}V_t(\psi,\phi).$$

那么 $\{\psi_t,\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 定义一种自融资投资策略，当且仅当对所有的 $t\in[0,T]$，

$$\tilde{V}_t(\psi,\phi)=\tilde{V}_0(\psi,\phi)+\int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u \quad (\text{以概率 } 1).$$

证 首先假设投资组合 $\{\psi_t,\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是自融资的，那么

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}_t(\psi,\phi) &= -re^{-rt}V_t(\psi,\phi)dt+e^{-rt}dV_t(\psi,\phi)\\
&= -re^{-rt}(\psi_t e^{rt}+\phi_tS_t)dt+e^{-rt}\psi_t d(e^{rt})+e^{-rt}\phi_t dS_t\\
&= \phi_t(-re^{-rt}S_t dt+e^{-rt}dS_t)\\
&= \phi_t d\tilde{S}_t
\end{aligned}$$

充分条件得证.

114　必要条件的证明类似，并留作习题. □

定价策略

在进一步深入讨论之前，概述一下我们的投资策略. 用 C_T 表示 T 时刻要复制的权益价格. 它可能以更复杂的方式依赖于 $\{S_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，而不是仅通过 S_T. 假设可以找到一个可料过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，使得贴现的权益 C_T 满足

$$\tilde{C}_T\triangleq e^{-rT}C_T=\phi_0+\int_0^T \phi_u d\tilde{S}_u.$$

那么就可以通过一个投资组合复制权益，该投资组合由 t 时刻 ϕ_t 份额的股票和 ψ_t 份额的现金债券组成，这里选择 ψ_t，使得

$$\tilde{V}_t(\psi,\phi)=\phi_t\tilde{S}_t+\psi_t e^{-rt}=\phi_0+\int_0^T \phi_u d\tilde{S}_u.$$

根据引理 5.1.3，该投资组合是自融资的，而且，$V_T = C_T$. 于是权益在 $t = 0$ 时刻的公平价格为 $V_0 = \phi_0$.

如果 ϕ_0 已知，这样做是很好的，但是，有一种既快又容易的方法求出正确的定价而无需直接寻找投资策略 $\{\psi_t, \phi_t\}_{t\geqslant 0}$. 假设可以找到一个概率测度 $\mathbb{Q}$，在此测度下，股票的贴现价格是鞅. 那么，只要 $\int_0^T \phi_u^2 \mathrm{d}u < \infty$，

$$\int_0^t \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u$$

就是一个均值为 0 的 $\mathbb{Q}$ - 鞅，因此

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T(\psi, \phi)] = \phi_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^t \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u\right] = \phi_0.$$

故 $\phi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{C}_T]$ 是公平价格.

上式完全与定理 2.3.13 中的定价公式相类似. 如果概率测度 $\mathbb{Q}$ 与市场测度 $\mathbb{P}$ 等价，在此测度下，股票价格贴现是鞅，那么只要有一个复制投资组合存在，则该权益在零时刻的公平价格就是 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{C}_T]$，即为此测度下权益的贴现期望价格.

我们已经假设过程 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 存在. 下面应用鞅表示定理来证明定理 5.1.5(对基本的 Black-Scholes 市场模型) 中的这一点. 首先，如果我们的定价公式有意义，那么我们应该找到相应的等价鞅测度 (equivalent martingale measure)$\mathbb{Q}$.

等价鞅测度

引理5.1.4(一种概率测度在其下 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅) *存在等价于 $\mathbb{P}$ 的概率测度 $\mathbb{Q}$，在此测度下，股票的贴现价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅，且 $\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数为*

$$L_t^{(\theta)} \triangleq \left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right),$$

这里 $\theta = (\mu - r)/\sigma$.

115

证 已知

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t,$$

故

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(-r\mathrm{d}t + \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t).$$

因此，如果令 $X_t = W_t + (\mu - r)t/\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma\mathrm{d}X_t.$$

由定理 4.5.1，$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动，因此 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅. 而且，

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\sigma X_t - \sigma^2 t/2\right).$$ □

资产定价基本定理

现在在 Black-Scholes 框架下证明资产定价基本定理.

定理5.1.5 设 $\mathbb{Q}$ 是引理 5.1.4 中给出的测度. 假设在 T 时刻一个权益由非负随机变量 $C_T \in \mathcal{F}_t$ 给出. 如果

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T^2] < \infty,$$

那么, 该权益是可复制的, 且 t 时刻任何复制投资组合的价值为

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

特别地, 在零时刻期权的公平价格为

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}C_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{C}_T].$$

证 由引理 5.1.3 的讨论知道, 如果找到一个过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$, 使得

$$\tilde{C}_T = \phi_0 + \int_0^T \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u,$$

那么可以构造一个复制投资组合, 它在 t 时刻的价值满足

$$\tilde{V}_t(\psi,\phi) = \phi_0 + \int_0^t \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u, \tag{5.1}$$

116 由随机积分的鞅性质, 此式精确表示为

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_t(\psi,\phi)\\&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi_0 + \int_0^T \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u \middle| \mathcal{F}_t\right]\\&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{C}_T \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

去掉 [0, t] 上的贴现得

$$V_t(\psi,\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

下面证明这样的价格是惟一的. 显然, 对任意其他复制投资组合 $\{\hat{\psi}_t, \hat{\phi}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$, 有 $V_T(\hat{\psi},\hat{\phi}) = C_T$. 如果它是自融资的 (由引理 5.1.3), 则它满足方程 (5.1). 重复上面的讨论, 可看到对任意的自融资的复制投资组合可以得到相同的价值.

如果能证明存在一个可料过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 使得

$$\tilde{C}_T = \phi_0 + \int_0^T \phi_u \mathrm{d}\tilde{S}_u,$$

那么定理得证. 现在，由习题 2,

$$M_t \triangleq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

是一个平方可积的 $\mathbb{Q}$ - 鞅. 初始布朗运动的自然 σ - 域流和引理 5.1.4 中定义的过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是相同的. 即 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个平方可积的"布朗鞅"，由布朗鞅表示定理 4.6.2 可知，存在一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$- 可料过程 $\{\theta_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，使得

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s.$$

由于 $\mathrm{d}\tilde{S}_s = \sigma\tilde{S}_s\mathrm{d}X_s$，令

$$\phi_t = \frac{\theta_t}{\sigma\tilde{S}_t} \quad \text{和} \quad \psi_t = M_t - \phi_t\tilde{S}_t.$$

容易看到，定义 5.1.2 中的条件 1 满足，因此相应于 $\{\psi_t, \phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的投资策略定义的自融资复制投资组合即为所求. 证毕. □

注释 上面证明的定理是非常一般化的. 在适当的边界条件下，只要权益 C_T 是仅依赖于到 T 时刻股票价格的路径，那么它几乎可能是任意复杂的. 在零时刻的权益价格是 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T\right]$，即使对于更复杂的权益 C_T，也可以进行求解，至少可用数值方法来求解.

我们不仅已经证明存在一个公平价格，而且能对权益进行对冲. 它的缺点在于尽管可以断定存在对冲策略，但没有得到它的显式表达式. 下一节我们将求欧式期权的这种表达式，这是一种仅依赖于到期日的股票价格的权益. □ 117

和离散情形一样，已经确定了对权益进行定价和复制的步骤.

复制三步骤:

1. 寻找一个测度 $\mathbb{Q}$，在此测度下，资产的贴现价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅.
2. 构造过程 $M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right]$.
3. 寻找一个可料过程 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$，使得 $\mathrm{d}M_t = \phi_t\mathrm{d}\tilde{S}_t$.

5.2 欧式期权的 Black-Scholes 定价和对冲

欧式期权，即期权的最终收益仅依赖于原生资产在到期日的价格，期权和对冲组合的价格都能用显式形式表示.

首先我们计算权益的价格，这里的基本假设同 5.1 节中的假设.

命题5.2.1　到期日收益为 $C_T = f(S_T)$ 的欧式期权在 t 时刻的价值为 $V_t = F(t, S_t)$，其中

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\exp\left((r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right)\right) \times \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}dy.$$

证　由定理 5.1.5 可知 t 时刻期权价格为

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right], \tag{5.2}$$

这里 $\mathbb{Q}$ 是引理 5.1.4 中得到的鞅测度. 在该测度下，$X_t = W_t + (\mu - r)t/\sigma$ 是布朗运动，且

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dX_t.$$

解该方程得

$$\tilde{S}_T = \tilde{S}_t \exp\left(\sigma(X_T - X_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right).$$

将上式代入 (5.2) 得

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\exp\left(\sigma(X_T - X_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

118 因为在测度 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathcal{F}_t$ 条件下，$X_T - X_t$ 是一个期望为 0，方差为 $(T-t)$ 的正态分布随机变量，故计算得

$$\begin{aligned} V_t &= F(t,S_t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\exp\left(\sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(T-t)}\right)dz \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right)\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy, \end{aligned}$$

得证. □

对欧式看涨和看跌期权，命题 5.2.1 中的函数 F 都能够直接计算出来.

对欧式看涨和看跌期权定价

例5.2.2 (欧式看涨期权) 在命题 5.2.1 的记号中，假设 $f(S_T) = (S_T - K)_+$，记 $\theta = (T-t)$，那么

$$F(t,x) = x\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\theta}\Phi(d_2), \tag{5.3}$$

这里 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数，满足

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y,$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{x}{K}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}.$$

证 将 f，x 代入到命题 5.2.1 证明过程的最后一行中，有

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\theta}Z - \sigma^2\theta/2} - K\mathrm{e}^{-r\theta}\right)_+\right], \tag{5.4}$$

这里 $Z \sim N(0,1)$. 首先由被积函数非零确定 Z 的取值范围，重新整理得

$$x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\theta}Z - \sigma^2\theta/2} > K\mathrm{e}^{-r\theta}$$

等价于

119

$$Z > \frac{\log(\frac{K}{x}) + \frac{\sigma^2}{2}\theta - r\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

因此，如果 $Z + d_2 \geqslant 0$，则 (5.4) 中的被积函数非零. 用记号

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\theta}Z - \sigma^2\theta/2} - K\mathrm{e}^{-r\theta}\right)\mathbf{1}_{Z+d_2\geqslant 0}\right] \\
&= \int_{-d_2}^{\infty}\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\theta}y - \sigma^2\theta/2} - K\mathrm{e}^{-r\theta}\right)\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{d_2}\left(x\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\theta}y - \sigma^2\theta/2} - K\mathrm{e}^{-r\theta}\right)\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y \\
&= x\int_{-\infty}^{d_2}\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\theta}y - \sigma^2\theta/2}\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y - K\mathrm{e}^{-r\theta}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

将 $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$ 代入最后一行的第一个积分，即可得到

$$F(t,x) = x\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\theta}\Phi(d_2).$$

□

方程 (5.3) 就是著名的欧式看涨期权的 Black-Scholes定价公式 (Black-Scholes pricing formula)，相应的欧式看跌期权的定价公式在习题 3 中给出.

注释

1. 除了用布朗运动代替几何布朗运动，巴舍利耶实际上得到了一个和欧式看涨期权定价公式非常类似的公式. 但是，这只是个意外. 巴舍利耶用期望定价，而没有用到动力的对冲概念.

2. 注意到定价公式只依赖于一个未知参数 σ，它被实验者称为波动率(volatility). 在对冲理论中同样会出现这样一个未知参数. 出现的问题是如何从市场数据中估计 σ 的值，最常用的方法就是运用隐含波动率 (implied volatility). 在正规市场引入某些期权. 欧式看涨和看跌期权的价格是一个关于波动率 σ 的递增函数，因此我们可以将 Black-Scholes 公式转化并将隐含的波动率与每个期权联系起来. 但不幸的是，用这种方法得到的 σ 的估计值通常依赖于敲定价格和到期日的时间. 这个问题我们将在 7.4 节中给出简单的讨论.

□

看涨和看跌期权对冲 120

现在回到欧式期权的对冲问题，即如何构造一个复制权益投资组合?

鞅表示定理告诉我们由于在相同测度下贴现的期权价格和贴现的股票价格是鞅，一个恰好是另一个的局部尺度版本，它正是我们需要表述的局部尺度. 在 2.5 节讨论的离散情形下，将 ϕ_{i+1} 看作在第 $i+1$ 时刻上 期权价格的变化与股票价格的变化之间的比率. 那么在连续情形下，ϕ_t 应该是期权价格关于股票价格的偏导数，这个猜测应该是合理的，现在给出证明.

命题5.2.3 *在命题 5.2.1 的记号中，定理 5.1.5 中的复制投资组合中决定股票持有份额的过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 为*

$$\phi_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\bigg|_{x=S_t}.$$

证 在命题 5.2.1 的记号下，定理 5.1.5 的结论变为

$$F(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}f(S_T)\Big|S_t = x\right]$$

这里，在 $\mathbb{Q}$ 下，

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t\mathrm{d}X_t$$

且 $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是布朗运动. 显然

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}X_t.$$

结合 Feynman-Kac 表示定理和微分的一般乘法法则，$F(t,x)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

这就是 Black-Scholes方程 (Black-Scholes equation). 在习题 4 中，也可以用其他的方法来证明 $F(t,x)$ 满足这个方程.

定义函数 $\tilde{F}(t,x)=\mathrm{e}^{-rt}F(t,x\mathrm{e}^{rt})$, 则 $\tilde{V}_t=\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$. 注意到

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}(t,x)=-\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2}(t,x)$$

并对于 $0\leqslant u\leqslant T$ 在 $\tilde{F}(u,\tilde{S}_u)$ 上应用伊藤公式，有

$$\begin{aligned}\tilde{F}(T,\tilde{S}_T) &= F(0,S_0)+\int_0^T\sigma\tilde{S}_s\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(s,\tilde{S}_s)\mathrm{d}X_s\\ &= F(0,S_0)+\int_0^T\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(s,\tilde{S}_s)\mathrm{d}\tilde{S}_s.\end{aligned}$$

于是有

$$\phi_t=\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(t,\tilde{S}_t)=\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)$$

得证. □

例5.2.4 (欧式看涨期权的对冲) 对一个欧式看涨期权，利用例 5.2.2 中的记号，可得

121

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=\Phi(d_1).$$

证 用例 5.2.2 中同样的记号，有

$$F(t,x)=\mathbb{E}\Big[\Big(x\exp\Big(\sigma\sqrt{\theta}Z-\sigma^2\theta/2\Big)-K\Big)_+\Big],$$

其中 $Z\sim N(0,1),\theta=(T-t)$. 如果被积函数严格大于零，则对上式关于 x 求导得 $\exp(\sigma\sqrt{\theta}Z-\sigma^2/2)$，否则上式为零. 那么，再次应用例 5.2.2 的记号，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= \mathbb{E}\Big[\exp\left(\sigma\sqrt{\theta}Z-\sigma^2\theta/2\right)\mathbf{1}_{Z+d_2\geqslant 0}\Big]\\ &= \int_{-d_2}^{\infty}\exp\Big(\sigma\sqrt{\theta}y-\sigma^2\theta/2-y^2/2\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

与前面推导 $\Phi(d_1)$ 一样，首先令 $u=-y$，然后令 $z=u+\sigma\sqrt{\theta}$. 因此

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=\Phi(d_1).$$

对欧式看跌期权可计算得

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=-\Phi(-d_1).$$

□

注释 (希腊字母)　$\partial F/\partial x$ 通常被实验者称为期权中的 δ. 对资产和其衍生产品的投资组合 π 来说，价格对市场参数的灵敏度由这个希腊字母决定. 如果我们用 $\pi(t,x)$ 表示在 t 时刻资产价格为 x 的投资组合的价值，那么除了用 $\frac{\partial \pi}{\partial x}$ 表示 δ 外，还有 Γ,Θ和$\mathcal{V}$：

$$\Gamma=\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2},\quad \Theta=\frac{\partial\pi}{\partial t},\quad \mathcal{V}=\frac{\partial\pi}{\partial\sigma}.\qquad \square$$

5.3　外　汇

这节将通过观察外汇市场来开始计划在模型中增加金融的复杂性研究更为复杂的金融模型. 持有现金是一件有风险的事，并且随着这个风险的到来产生了对衍生产品有一个要求. 为了在这样的市场中进行运作，我们希望能够在单位货币未来价值的基础上，根据另一种货币来估计权益的价值.

关于远期汇率的定价问题在第 1 章的习题 13 中已经得到了解决. 与基于不支付红利的原生股票的远期合约定价问题相比，这个问题在 1.2 节中也已得到了解决，对于远期汇率，需要考虑两种货币的利率. 类似地，在例 1.6.6 中建立在英镑和美元之间的汇率基础上的欧式看涨期权的定价中，我们需要一个关于这两种现金债券的模型. 关于对外汇市场的 Black-Scholes 模型也必须用两种货币结合现金债券. 为了进一步明确，假设这两种货币分别是美元和英镑.

122

Black-Scholes 货币模型：用 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示美元现金债券，$\{D_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示英镑现金债券. E_t 表示 t 时刻 1 英镑的美元价值，市场模型是：

美元债券　$B_t=\mathrm{e}^{rt}$,

英镑债券　$D_t=\mathrm{e}^{ut}$,

汇　　率　$E_t=E_0\exp(\nu t+\sigma W_t)$,

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 布朗运动，r,u,ν,σ 是常数.

现在正遇到的问题是：汇率不可交易，我们必须在离散情形下克服它. 必须将运作限定在单一的市场里. 首先从美元投资者的角度来看，在美元市场不管是英镑现金债券还是汇率都是不可交易的. 然而，两者的乘积 $S_t=E_tD_t$ 可被看作是美元可交易资产. 美元投资者持有英镑现金债券，它们在 t 时刻的美元价值就是 S_t. 进一步地，建立在汇率 E_T 基础上的任何权益均可被看作为建立在 S_T 上的权益.

现在已经建立了反映 5.1 节中基本 Black-Scholes 模型的一个范例. 从美元交易者的角度来看，实际上存在着两种过程：美元现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和英镑

现金债券的美元价值 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$. 我们现在在这个背景下应用 Black-Scholes 方法. 令 C_T 表示在 T 时刻的权益价值 (用美元表示).

复制三步骤 (外汇):

1. 寻找一个测度 $\mathbb{Q}$, 在此测度下, (美元债券) 贴现过程 $\{\tilde{S}_t = B_t^{-1}S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅.
2. 构造过程 $M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}C_T|\mathcal{F}_t]$.
3. 寻找一个适应过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 使得 $\mathrm{d}M_t = \phi_t \mathrm{d}\tilde{S}_t$.

因为 $S_t = E_tD_t = \exp((\nu+u)t+\sigma W_t)$, 故过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 恰好是一个几何布朗运动, 因此, 5.1 节中的工作可确保按照下面的步骤进行.

首先应用伊藤公式得到 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足的随机微分方程: 123

$$\mathrm{d}S_t = \left(\nu + u + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

现在应用引理 5.1.4, 得到测度 $\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t^{(\theta)} \triangleq \exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right),$$

在测度 $\mathbb{Q}$ 下, 美元贴现过程 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅, 这里 $\theta = (\nu+u+\frac{1}{2}\sigma^2-r)/\sigma$. 而且,

$$X_t \triangleq W_t + \frac{\left(\nu+u+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)}{\sigma}t$$

是 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动.

在一个特例中, 我们按照如下步骤讨论过程的余下部分 (可参看习题 11).

例5.3.1 (远期合约) *在未来 T 时刻, 将以什么价格来交易英镑.*

解 当然, 我们已经在第 1 章的习题 13 中解决了这个问题. 但现在不想用对冲组合的方法, 而用复制三步骤的方法来讨论该问题.

已经找到了测度 $\mathbb{Q}$, 现在如果在 T 时刻以 K 美元来兑换 1 单位的英镑, 那么这份合约的收益是

$$C_T = E_T - K.$$

则在 t 时刻合约的价值为

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(E_T-K)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

一份远期合约在零时刻一文不值，因此必须选择 K，使得 $V_0 = 0$. 换句话说，$K = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[E_T]$. 把 E_T 表示为 X_T 的函数，其表达式为

$$E_T = E_0 \exp\left(\sigma X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + (r-u)T\right).$$

这样表示以致于 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动，故 K 的公平价格为

$$K = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[E_T] = \mathrm{e}^{(r-u)T}E_0.$$

124　最后找出对冲组合. 根据敲定价格的选取，t 时刻合约的价值为

$$V_t = \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big(E_T - E_0\mathrm{e}^{(r-u)T}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

因为 $E_T = D_T^{-1}B_T\tilde{S}_T$，在 $\mathbb{Q}$ 下，有

$$\mathbb{E}[E_T|\mathcal{F}_t] = \mathrm{e}^{(r-u)(T-t)}D_t^{-1}B_t\mathbb{E}\big[\tilde{S}_T|\mathcal{F}_t\big] = \mathrm{e}^{(r-u)(T-t)}D_t^{-1}B_t\tilde{S}_t = \mathrm{e}^{(r-u)(T-t)}E_t,$$

故代入上式可得

$$V_t = \mathrm{e}^{-u(T-t)}E_t - \mathrm{e}^{rt-uT}E_0 = \mathrm{e}^{-uT}\big(\mathrm{e}^{ut}E_t - \mathrm{e}^{rt}E_0\big).$$

美元贴现的组合价值为

$$M_t = \mathrm{e}^{-rt}V_t = \mathrm{e}^{-uT}\mathrm{e}^{-(r-u)t}E_t - \mathrm{e}^{-uT}E_0 = \mathrm{e}^{-uT}\tilde{S}_t - \mathrm{e}^{-uT}E_0.$$

即所求的对冲组合是常数，它由 $\phi_t = \mathrm{e}^{-uT}$ 份额的英镑现金债券和 $\psi_t = -\mathrm{e}^{-uT}E_0$ 份额的 (美元) 现金债券构成. □

英镑投资者　现在回到英镑投资者方面. 从他的角度来看，在英镑市场也可以进行交易. 再次，有两种可交易的英国货币起作用，一种是英镑现金债券，另一种是美元债券的英镑价值 $Z_t = E_t^{-1}B_t$.

再次根据复制三步骤来计算. 美元债券的英镑贴现价值为

$$\tilde{Z}_t = D_t^{-1}E_t^{-1}B_t = E_0^{-1}\exp(-\sigma W_t - (\nu + u - r)t).$$

由引理 5.1.4 可知，在测度 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 下，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\pounds}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t^{(\lambda)} \triangleq \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right),$$

这里 $\lambda = (\nu + u - r - \sigma^2/2)/\sigma$，$\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅，且

$$X_t' = W_t + \frac{(\nu + u - r - \sigma^2/2)}{\sigma}t$$

是 $\mathbb{Q}^{\pounds}$- 布朗运动. 那么对英镑投资者来说，期权价格为

$$U_t = D_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\pounds}}\left[D_T^{-1}E_T^{-1}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

现在有和第 1 章的习题 15 中同样的担心.风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 可被认为定义了一个在遵循 $\{E_t\}_{t\geqslant 0}$ 的路径上的概率测度，($\{E_t\}_{t\geqslant 0}$ 是模型中仅有的真实随机部分)，并且这两种测度是不同的. 那么它们能得到同样的定价公式吗？

计价单位变换

关注余下部分就会发现投资英镑的美元价值为

$$E_tU_t = E_tD_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\pounds}}\left[D_T^{-1}E_T^{-1}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

和 V_t 的表达式作比较，又由 Girsanov 定理知，可以将这个期望表示为 $\mathbb{Q}$- 期望. 现在

125

$$X_t' = W_t + \frac{(\nu+u-r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}t = X_t - \sigma t,$$

因此

$$\zeta_t \triangleq \left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\pounds}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\sigma X_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

现在

$$E_t = E_0\exp\left(\sigma X_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + (r-u)t\right),$$

因此记 $\zeta_t = B_t^{-1}D_tE_t$，代入有

$$\begin{aligned} E_tU_t &= E_tD_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\pounds}}\left[D_T^{-1}E_T^{-1}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E_tD_t\zeta_t^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T^{-1}E_T^{-1}\zeta_TC_T\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= B_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

换句话说，英镑投资者所得到的美元价值准确来讲就是 V_t，测度的差别仅是对“资产参照物”或计价单位(numeraire) 不同选择的人为因素.

5.4 红 利

迄今为止，我们总是假设只持有无息股票. 现在我们放宽这一限制，即假定允许基于股权 (即定期现金支付红利的股票) 的期权的定价和对冲.

连续支付红利情形是最简单的.如前所述，假设股票价格遵循几何布朗运动

连续支付情形

$$S_t = S_0\exp(\nu t + \sigma W_t),$$

但是现在在无穷小时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t)$ 上，股票的持有者可获得的红利为 $\delta S_t\mathrm{d}t$，其中 δ 是常数. 与通常一样，我们也假设市场包含一种无风险的现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$，且用 r 表示连续的复利.

但是现在面临的困难是 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 并不能表示资产的真实价值：如果在零时刻以 S_0 的价格购买股票，当在 t 时刻卖出去时，持有人获得的价值并不只是 S_t-S_0，而是整个红利的累积. 在该模型中，这些将依赖于资产价格在 $[0,t]$ 时段内所取的所有值. 从这个意义上讲，$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是不可交易的.

和外汇一样，解决办法是将此过程转化成可交易的. 最简单的办法如下. 假设无论何时支付现金红利，我们立即将它再投资到股票市场. 用无穷小收益 $\delta S_t\mathrm{d}t$ 购买 $\delta\mathrm{d}t$ 份额的股票. 在 t 时刻，持有的不是一份股票，而是持有 $\mathrm{e}^{\delta t}$ 份，其总价值为

126

$$Z_t=S_0\exp((\nu+\delta)t+\sigma W_t).$$

考虑简单的投资组合，它由持有的股票和以这种方式连续再投资的红利得到，该组合作为 t 时刻价值为 Z_t 的单资产. 持有这种资产没有交易费用且不支付红利. 我们回到熟悉的 Black-Scholes 模型中.

注释　由于支付的红利与股票价格的比是常数，因此，很自然地可将它们再投资到股票市场. 支付固定数额的现金，将更自然地把“可交易”资产构造为投资组合，在这个组合中，红利立即再投资到债券中. 这种情况将在 5.5 节中予以说明. □

任何一个由 t 时刻 $\phi_t\mathrm{e}^{\delta t}$ 份额支付红利的原生股票和 ψ_t 份额现金债券构成的投资组合，都可看作是由 ϕ_t 份额新的可交易资产和 ψ_t 份额现金债券构成的投资组合.

现在我们可以写出我们熟悉的步骤.

复制三步骤 (连续支付红利情形)：令 $\tilde{Z}_t=B_t^{-1}Z_t=\mathrm{e}^{-rt}Z_t$.

1. 寻找概率测度 $\mathbb{Q}$，在此测度下，$\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$(关于它的自然 σ - 域流) 是鞅.
2. 构造贴现过程 $\tilde{V}_t=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right]$.
3. 寻找一个可料过程 $\{\phi_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 使得 $\mathrm{d}\tilde{V}_t=\phi_t\mathrm{d}\tilde{Z}_t$.

注意到，如果期权价值 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足

$$\mathrm{d}V_t=\phi_t\mathrm{d}Z_t+\psi_t\mathrm{d}B_t=\phi_t\mathrm{d}S_t+\phi_t\delta S_t\mathrm{d}t+\psi_t\mathrm{d}B_t.$$

那么由 ϕ_t 份额可交易资产和 ψ_t 份额现金债券构成的投资组合在任何时刻 $t\in[0,t]$ 是自融资的 (self-financing). 在 $[t,t+\mathrm{d}t)$ 上期权价值的改变不仅仅只是由于交易过程中的利润和损失，而且还与支付的红利有关.

例5.4.1 (看涨期权) 假设一份敲定价格为 K，到期日为 T 的看涨期权记为上面所描述的支付红利的股票. 那么在零时刻这份期权的价值是多少? 复制组合是什么?

解 根据复制三步骤来计算. 首先必须找到鞅测度 $\mathbb{Q}$，$\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}\tilde{Z}_t = \left(\nu+\delta+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)\tilde{Z}_t\mathrm{d}t+\sigma\tilde{Z}_t\mathrm{d}W_t.$$

像通常一样利用 Girsanov 定理，由

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\lambda W_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

定义 $\mathbb{Q}$ 测度，其中 $\lambda=\left(\nu+\delta+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)/\sigma$，在此测度下

$$X_t = W_t+\frac{\left(\nu+\delta+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)}{\sigma}t$$

是一个布朗运动，因此 $\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅. 现在来看例 5.2.2 和 5.2.4 中相应的对冲和定价公式. 在 t 时刻投资组合的价值为

$$\begin{aligned}
V_t &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T-K)_+|\mathcal{F}_t]\\
&= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\mathrm{e}^{-\delta T}Z_T-K\right)_+\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{e}^{-\delta T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(Z_T-K\mathrm{e}^{\delta T}\right)_+\Big|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

这个价值即为到期日为 T，敲定价为 $K\mathrm{e}^{\delta t}$ 的看涨期权 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 价值的 $\mathrm{e}^{-\delta T}$ 倍. 用 $F_t=\mathrm{e}^{(r-\delta)(T-t)}S_t$ 表示原生股票在 t 时刻的远期价格 (见习题 14)，由例 5.2.2，可得

$$\begin{aligned}
V_t &= \mathrm{e}^{-\delta T}\left\{Z_t\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{Z_t}{K\mathrm{e}^{\delta T}}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-K\mathrm{e}^{\delta T}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{Z_t}{K\mathrm{e}^{\delta T}}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\left\{F_t\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F_t}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-K\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F_t}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

现在由例 5.2.4 可知，复制投资组合应该由 t 时刻 $\mathrm{e}^{-\delta T}\phi_t$ 份额的可交易资产 Z_t 构成，这里

$$\phi_t = \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F_t}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

128 相当于

$$e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F_t}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

份额的支付红利的资产. 在该投资组合中持有的债券为

$$\psi_t=-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F_t}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$ □

例5.4.2 (担保股权收益) 令 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示英国的 FTSE 股票指数的价值. 假设购买一份 5 年期的合约, Z 表示 FTSE 的终值与原始值比的 90%, 若 $Z\in[1.3,1.8]$, 则将支付 Z; 若 $Z<1.3$, 则支付 1.3; 若 $Z>1.8$, 则支付 1.8. 问在零时刻这份合约的价值是多少?

解 权益 C_T 为

$$C_T=\min\left\{\max\left\{1.3,0.9\frac{S_T}{S_0}\right\},1.8\right\},$$

其中 T 为 5 年. 因为权益建立在比率基础上, 不失一般性, 令 $S_0=1$. 当 FTSE 由 100 份不同的股票组成时, 它们各自分开支付的红利可近似看成连续支付. 假设有下面的数据:

FTSE 指数的漂移系数	$\mu=7\%$,
FTSE 指数的波动率	$\sigma=15\%$,
FTSE 指数的红利率	$\delta=4\%$,
英国的利率	$r=6.5\%$.

将该权益再记为一部分现金加上两份 FTSE 看涨期权收益的差, 即

$$C_T=1.3+0.9\{(S_T-1.444)_+-(S_T-2)_+\}.$$

现在关于 S_t 的远期价格为

$$F_t=e^{(r-\delta)(T-t)}S_0=1.133,$$

因此用例 5.4.1 中的对于连续支付红利股票的看涨期权定价公式, 可以计算出在零时刻这两份看涨期权价格分别是 0.0422 和 0.0067 (每单位). 因此在零时刻合约的价值为

$$1.3e^{-rT}+0.9(0.0422-0.0067)=0.9712.$$ □

定期支付红利

在实际中, 一份单个股票不能连续支付红利, 而在某个定期的时段上支付. 假设事先已知支付红利的时间为 $T_1,T_2,\cdots$, 在每个 T_i 时刻, 股权的当前持有者获得的股息为 δS_{T_i}. 和第 2 章的习题 7 一样, 在无套利情形下, 股票

129

价格必定同时下跌相等数额. 因此在任意的 T_i 时刻，支付的红利恰好等于股票价格瞬时下跌的数额. 假设在相邻两个支付红利时段之间股票价格服从通常的几何布朗运动.

定期支付红利的股权模型： 在确定的时间 $T_1, T_2, \cdots$，股权支付的红利是红利支付前股票的瞬时价格的 δ 倍. 股票价格本身的模型为

$$S_t = S_0(1-\delta)^{n[t]}\exp(\nu t + \sigma W_t),$$

其中 $n[t] = \max\{i : T_i \leqslant t\}$ 是到 t 时刻为止支付红利的次数. 此外, 还有一个无风险现金债券 $B_t = \exp(rt)$.

显然，这里有两个问题：第一，尽管在时刻 T_i 之间股票价格遵循通常的几何布朗运动模型，而在那些时刻股票价格都有间断地跳跃，这不符合连续情形的框架. 第二，对于连续支付红利的情形，股票价格过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 并不反映股票的实际价格. 然而，通过对连续支付红利的情形应用我们的投资策略，并将所有支付的红利重新投资于股票，就会克服上面两个问题.

定义 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 为投资组合的价值，这个投资组合以在零时刻购买一份股票开始，随后每一次支付红利时，股票持有者将支付的红利重新投资来购买更多的股票. 第一次支付的红利是 δS_{T_1-}，即为在支付日之前股票瞬时价格的 δ 倍. 第一次支付了红利后，股票价格就立即跳为 $S_{T_1+} = (1-\delta)S_{T_1-}$，因此支付的红利可用来购买另外的 $\delta/(1-\delta)$ 份额的股票，因此股票持有者拥有的股票总数按因子 $1/(1-\delta)$ 增长. 因此，在 t 时刻这个投资组合将由 $1/(1-\delta)^{n[t]}$ 份额的股票构成. 则

$$Z_t = (1-\delta)^{-n[t]}S_t = S_0\exp(\nu t + \sigma W_t).$$

与前一样，将投资组合 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 看作一份不支付红利的资产，因此我们的市场由两种可交易资产构成，即投资组合 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 和无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$. 回到我们所熟知的情形.

我们精确地模拟对连续支付红利情形所做的工作. 由 t 时刻 ϕ_t 份额的 Z_t 和 ψ_t 份额的现金债券构成的投资组合等价于由 $(1-\delta)^{-n[t]}\phi_t$ 份额的支付红利的原生资产 S_t 和 ψ_t 份额的现金债券构成的投资组合.

使得贴现过程 $\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅的测度 $\mathbb{Q}$ 满足 130

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

其中 $\lambda = \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)/\sigma$. 再将权益写为 Z_T 的函数，可以用经典的 Black-Scholes 分析方法去对期权进行定价和对冲.

例5.4.3 (远期价格) 签订一份定期支付红利的股票的远期合约，求它的公平价格.

解 在 T 时刻，合约价值 $C_T = S_T - K$. 求 K，使得零时刻合约的价值为 0. 像通常一样，在 t 时刻合约价值是鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下权益贴现的期望值. 即

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(S_T - K)\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big((1-\delta)^{n[T]}Z_T - K\Big)\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= (1-\delta)^{n[T]}Z_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \\ &= (1-\delta)^{n[T]-n[t]}S_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

因此，在零时刻合约价值为 0 的 K 为

$$K = \mathrm{e}^{rT}(1-\delta)^{n[T]}S_0. \tag{5.5}$$

□

5.5 债 券

一个纯贴现债券是在未来一些 T 时刻收益为 1 的有价证券. 大部分的市场债券也会在预定的 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 时刻收到一系列小数额的利息 c. 除了事先知道息票的数额以外，*息票*(coupon) 的支付类似于红利的支付.

到现在为止，我们只考虑事先已知利率的无风险现金债券. 而在现实的市场中，由于利率的不确定性也会导致债券价格的随机变动. 为了节省篇幅，我们不打算全面考虑债券市场模型. Baxter 和 Rennie 早在 1996 年就已经给出了精彩的介绍. 因此本节的目的是从不同的角度来研究利率问题. 假设有一个无风险现金债券 $B_t = \mathrm{e}^{rt}$ 和一份随机变动的息票债券，在两次支付息票之间它的价格服从几何布朗运动. 显然，短期利率和债券价格之间有联系，而一旦超过短期时间界限，许多参与者往往忽略它们. 在效果上，将息票债券看成在 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 时刻预期支付现金红利的资产，这里假设 $T_n < T$. 记 $I(t) = \min\{i : t < T_i\}$, 债券价格满足

$$S_t = \sum_{i=I(t)}^{n} c\mathrm{e}^{-r(T_i - t)} + A\exp(\nu t + \sigma W_t),$$

131 其中 A, ν, σ 是常数.

像支付红利的股票一样，在支付息票时刻价格过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是不连续的. 然而，由过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，又可得到一个连续的不支付红利的资产. 因而，当支付的红利是股票价格的一部分时，它实质上是股票的再投资过程，现在，由于息票是固定支付现金，所以将其以无风险债券进行投资. 对于这个投资策

略，息票在 T_i 时刻支付，那么对于任意的 $t\in[0,T]$，其价值为 $c\mathrm{e}^{-r(T_i-t)}$，因此以这种方式构成的投资组合价值为

$$Z_t=\sum_{i=1}^{n}c\mathrm{e}^{-r(T_i-t)}+A\exp(\nu t+\sigma W_t).$$

这正是我们之前考虑的由无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和可交易资产 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 构成的市场.

与通常一样，我们想寻找一个测度 $\mathbb{Q}$，在此测度下，贴现的资产价格 $\{\tilde{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅. 而 $\tilde{Z}_t$ 恰好是固定的现金和 $\sum_{i=1}^{n}c\mathrm{e}^{-rT_i}$ 加上几何布朗运动 $A\exp((\nu-r)t+\sigma W_t)$. 如果

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}=\exp\left(-\lambda W_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

则其为 $\mathbb{Q}$ - 鞅，其中 $\lambda=\left(\nu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)/\sigma$. 在 $\mathbb{Q}$ 下，

$$X_t=W_t+\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)}{\sigma}t$$

是布朗运动. 收益为 C_T 的期权在 t 时刻的价值为

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

在 $\mathbb{Q}$ 下，在 T 时刻债券的价格恰好是

$$S_T=A\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma X_T\right).$$

在零时刻 S_T 的远期价格为 $F=A\mathrm{e}^{rT}$，且敲定价格为 K 的 S_T 的看涨期权在到期日 T 的价值为

$$\mathrm{e}^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F}{K}\right)+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-K\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{F}{K}\right)-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\};$$

参见习题 20.

5.6 风险的市场价格

已有一个确定的模式. 给定一个不可交易的股票，将它与一个被认为是可交易的投资组合结合起来，找到与那个可交易过程相对应的鞅测度，并用该测

度来给期权定价. 我们仅根据常识来决定什么是可交易资产和什么是不可交易资产，这确实不能纯粹地归结为数学问题，但如果决定了价格为 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 的资产确实是可交易的，且有无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$，那么我们就可确定在由它们构造的市场中可交易资产的类型. 假设 $\tilde{S}_t = B_t^{-1}S_t$ 是在 t 时刻可交易资产的贴现价格. 令 $\mathbb{Q}$ 是测度，在此测度下，$\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅. 如果考虑另一个过程 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$，满足 $\tilde{V}_t = B_t^{-1}V_t$ 的贴现过程 $\{\tilde{V}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\left(\mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t^{\tilde{S}}\}_{t\geqslant 0}\right)$ - 鞅，那么 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可交易的吗?

132

鞅和可交易资产

我们的策略是构造一个自融资的投资组合，该投资组合由可交易资产和在 t 时刻的价值总是恰为 V_t 的可交易的贴现过程构成. 像通常一样，第一步是应用鞅表示定理. 如果 $B_t^{-1}S_t$ 有非零的波动率，就能找到一个 $\{\mathcal{F}_t^{\tilde{S}}\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$，使得

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t = \phi_t \mathrm{d}\tilde{S}_t. \tag{5.6}$$

从 5.1 节中复制期权的投资组合的构造中得到启示，构造由 t 时刻 ϕ_t 份额的可交易资产 S_t 和 $\psi_t = \tilde{V}_t - \phi_t\tilde{S}_t$ 份额的 (可交易的)B_t 组成的投资组合. 该投资组合的价值在 t 时刻恰为 V_t. 我们必须验证它是否为自融资的. 现在

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t &= B_t\mathrm{d}\tilde{V}_t + \tilde{V}_t\mathrm{d}B_t \quad (\text{分部积分})\\
&= B_t\phi_t\mathrm{d}\tilde{S}_t + \tilde{V}_t\mathrm{d}B_t \quad (\text{方程 } (5.6))\\
&= B_t\phi_t\mathrm{d}\tilde{S}_t + \left(\psi_t + \phi_t\tilde{S}_t\right)\mathrm{d}B_t\\
&= \phi_t\left(B_t\mathrm{d}\tilde{S}_t + \tilde{S}_t\mathrm{d}B_t\right) + \psi_t\mathrm{d}B_t\\
&= \phi_t\mathrm{d}S_t + \psi_t\mathrm{d}B_t \quad (\text{分部积分}).
\end{aligned}$$

因此在任意小的时段上，投资组合价值的变化依赖于资产价格的变化. 故资产是自融资的，且 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可交易的.

反过来情况如何? 假设 $\{B_t^{-1}V_t\}_{t\geqslant 0}$不是一个 $\left(\mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t^{\tilde{S}}\}_{t\geqslant 0}\right)$ - 鞅，那么必有时刻 $s < T$ 使得

$$B_s^{-1}V_s \neq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}V_T \middle| \mathcal{F}_s^{\tilde{S}}\right],$$

有正的概率. 假设 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可交易的，通过令

$$U_t = B_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}V_T \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{S}}\right],$$

可以构造一个过程 $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$. 因为 $\{B_t^{-1}U_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\left(\mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t^{S}\}_{t\geqslant 0}\right)$ - 鞅，故可知 $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可交易的. 即有两种可交易资产，它们在 T 时刻有相同的价值，但它们在 $s < T$ 时刻以正的概率取不同的值. 习题 21 表明在无套利情形下，这发生了矛盾. 因此如果 $\{B_t^{-1}V_t\}_{t\geqslant 0}$ 不是鞅，那么 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 就是不可交易的.

当然，因为利率是确定的，$\mathcal{F}_t^{\tilde{S}}=\mathcal{F}_t^S$，故有下面的引理.

引理5.6.1 给定一个无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和一个可交易资产 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，过程 $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可交易资产当且仅当其贴现值 $\{B_t^{-1}V_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $(\mathbb{Q},\{\mathcal{F}_t^S\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，其中 $\mathbb{Q}$ 是测度，在这个测度下，贴现资产价格 $\{B_t^{-1}S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅. 133

可交易资产和风险市场价格

假设在一个单一的 Black-Scholes 市场模型中有两种可交易的风险资产 $\{S_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{S_t^2\}_{t\geqslant 0}$，即它们都是同一布朗运动的函数. 并由它们的随机微分方程所定义

$$\mathrm{d}S_t^i=\mu_i S_t^i\mathrm{d}t+\sigma_i S_t^i\mathrm{d}W_t.$$

为使它们都是可交易的，引理 5.6.1 告诉我们它们必须是关于同一测度 $\mathbb{Q}$ 的鞅. 假设 $B_t=\mathrm{e}^{rt}$，则必有

$$X_t=W_t+\left(\frac{\mu_i-r}{\sigma_i}\right)t,\quad i=1,2$$

是一个 $\mathbb{Q}$- 布朗运动. 如果

$$\frac{\mu_1-r}{\sigma_1}=\frac{\mu_2-r}{\sigma_2},$$

那只能有一种情形.

经济学家给出了这个量的金融意义：若把 μ 看作可交易资产的增长率，把 r 看作无风险债券的增长率，σ 看作资产的风险度量，那么

$$\gamma=\frac{\mu-r}{\sigma}$$

就是单位风险 (关于无风险利率) 的超额回报率. 由于这样，所以我们称它为**风险的市场价格** (market price of risk)，也就是众所周知的**夏普比率** (sharpe ratio). 在这样一个简单的市场里，每一个可交易的资产都应有相同的风险市场价格，否则将存在套利机会.

当然，当我们将测度从 $\mathbb{P}$ (市场测度) 变为 $\mathbb{Q}$ (鞅测度) 时，γ 就是在原始布朗运动中漂移项的变化. 然而，γ 吸引人的经济学解释对利用 $\mathbb{Q}$ 测度并不能提供一种新的论证. 复制方法使 Black-Scholes 分析得以正常进行，如果没有一个复制投资组合，那么我们的套利原理将失去意义.

习 题

1. 假设资产价格 S_t 满足 $\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t$，其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$，与通常一样，是标准 $\mathbb{P}$- 布朗运动. 令 r 表示无风险利率，那么无风险资产价格满足 $\mathrm{d}B_t=$

$rB_t\mathrm{d}t$. 记 $\{\psi_t, \phi_t\}$ 为由 t 时刻 ψ_t 份额的无风险资产 B_t 和 ϕ_t 份额的 S_t 构成的投资组合. 对下列每个选取的 ϕ_t，求出 ψ_t，使得该投资组合 $\{\psi_t, \phi_t\}$ 是自融资的. (提示: 在 t 时刻投资组合的价值是 $V_t = \psi_t B_t + \phi_t S_t$，并且如果 $\mathrm{d}V_t = \psi_t \mathrm{d}B_t + \phi_t \mathrm{d}S_t$，那么该投资组合是自融资的.)

(a) $\phi_t = 1$,

(b) $\phi_t = \int_0^t S_u \mathrm{d}u$,

134

(c) $\phi_t = S_t$.

2. 令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为与 $\mathbb{P}$- 布朗运动 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 有关的自然 σ - 域流. 证明：如果 $\mathbb{Q}$ 是一个等价于 $\mathbb{P}$ 的概率测度，H_T 是一个 $\mathcal{F}_T$- 可测的随机变量，且 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_T^2] < \infty$，则

$$M_t \triangleq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_T | \mathcal{F}_t]$$

是一个平方可积的 $\mathbb{Q}$ - 鞅.

3. 证明：在例 5.2.2 的记号中，敲定价格为 K，到期日为 T 的欧式看跌期权在 t 时刻的 Black-Scholes 价格为 $F(t, S_t)$，其中

$$F(t,x) = K\mathrm{e}^{-r\theta}\Phi(-d_2) - x\Phi(-d_1).$$

4. 假设用 $V_t = F(t, S_t)$ 表示欧式看涨期权的价值 (正如我们在命题 5.2.3 中的证明一样). 那么 $\tilde{V}_t = \mathrm{e}^{-rt}V_t$，且可定义 $\tilde{F}$ 为

$$\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t).$$

在风险中性测度下，贴现的资产价格满足 $\mathrm{d}\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t\mathrm{d}X_t$，这里 (在这个概率测度下)$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准布朗运动.

(a) 求 $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ 满足的随机微分方程.

(b) 利用 $\tilde{V}_t$ 是鞅的事实，在风险中性测度下，求出 $\tilde{F}(t,x)$ 所满足的偏微分方程，并由此证明:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + rx\frac{\partial F}{\partial x} - rF = 0.$$

这就是 Black-Scholes 方程.

5. Δ-对冲(delta hedging) 在金融书籍中下面 Black-Scholes 方程的导数是非常普遍的. 通常假设资产价格满足几何布朗运动，即

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

这里 μ, σ 是参数. 假设基于该资产我们试图求出一个欧式期权的价值，用 $V(t, S_t)$ 表示 t 时刻的期权价格. 对某个函数 f，知道在 T 时刻 $V(T, S_T) = f(S_T)$.

(a) 利用伊藤公式把 V 表示为随机微分方程的解.

(b) 假设投资组合 $\pi = V - \delta S$. 假设该投资组合是自融资的，求出 π 满足的随机微分方程.

(c) 求 δ，对于 δ 使构造的投资组合是“瞬时无风险”，即消去随机项.

(d) 一个瞬时无风险投资组合的回报率和无风险利率必定相同. 用这个事实求出 $V(t,x)$ 满足的 (常) 偏微分方程. 注意到这就是习题 4 中得到的 Black-Scholes 方程.

135

当然，δ 就是复制投资组合中所持股票的份额. 事实上，当构造的投资组合不是自融资的时，该衍生产品并不完全满足方程，这就违背了 (b) 中的假设. 严格的推导方法要求投资组合由 t 时刻一份期权，$-\delta$ 份额的资产及 $\mathrm{e}^{-rt}(V(t,S_t)-\delta S_t)$ 份额的现金债券构成.

6. 对到期日为 T，敲定价格为 K 的欧式看涨期权，计算由希腊字母表示的参数的值.

7. 一个可选择的求解 Black-Scholes 方程的方法是，通过变量代换将 Black-Scholes 方程转化为热传导方程. 假设 $F(t,x):[0,T]\times[0,\infty]\to\mathbb{R}$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)+rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)-rF(t,x)=0,$$

满足的边界条件为

$$\begin{aligned}F(t,0) &= 0\\ \frac{F(t,x)}{x} &\to 1\quad(x\to\infty)\\ F(T,x) &= (x-K)_+.\end{aligned}$$

也就是，F 是满足边界条件的 Black-Scholes 方程的解，即用于敲定价格为 K 到期日为 T 的欧式看涨期权的定价.

(a) 证明：作变量代换

$$x=K\mathrm{e}^y,\quad t=T-\frac{2\tau}{\sigma^2},\quad F=Kv(\tau,y)$$

从而原方程变为

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,y)=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\tau,y)+(k-1)\frac{\partial v}{\partial y}(\tau,y)-kv(\tau,y),\quad y\in\mathbb{R},\tau\in\left[0,\frac{1}{2}\sigma^2T\right],$$

其中 $k=2r/\sigma^2, v(0,y)=(\mathrm{e}^y-1)_+$.

(b) 现在令 $v(\tau,y)=\mathrm{e}^{\alpha y+\beta\tau}u(\tau,y)$，求 α 和 β，使得

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\tau,y),\quad y\in\mathbb{R},$$

并求 u 相应的初始条件.

(c) 求解 u，并代回原变量，从而得到欧式看涨期权的 Black-Scholes 定价公式.

8. 证明：对每一个常数 A，$V(t,x)=Ax$ 和 $V(t,x)=Ae^{rt}$ 均是 Black-Scholes 微分方程的精确解，并说明它们的金融意义及每种情况的对冲组合是什么？

136

9. 求出有下列特殊形式的 Black-Scholes 方程的最一般的解.

(a) $V(t,x)=V(x)$,

(b) $V(t,x)=f(t)g(x)$. 这些是有相似解的例子，其中 (a) 给出的解表示永久期权的价格.

10. 令 $C(t,S_t),P(t,S_t)$ 分别表示有相同敲定价格 K 和相同到期日 T 的欧式看涨和看跌期权的价值. 证明：$C(t,x)-P(t,x)$ 也满足终值条件为 $C(T,x)-P(T,x)=x-K$ 的 Black-Scholes 方程，且推出 $x-Ke^{-r(T-t)}$ 也是 Black-Scholes 方程的解. 试解释这些结论的金融意义.

11. 假设如同 5.3 节中的模型一样，求英镑看涨期权的 Black-Scholes 价格，该期权赋予我们在 T 时刻以 K 美元兑换 1 英镑的权利. 相应的对冲组合是什么？

12. 验证 5.3 节中英镑和美元投资者使用完全相同的复制策略.

13. 假设美元/日元的汇率对于常数 μ,σ 满足下面的随机微分方程

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t,$$

那么在一年内期望的美元/日元和日元/美元汇率都是 $2S_0$，这可能吗？

14. 用通常的符号，假设资产价格在 t 时刻遵循几何布朗运动 $S_t=S_0\exp(\nu t+\sigma W_t)$. 如果在每个无穷小的时间区间上支付给资产持有人 $\delta S_t dt$ 的红利，求出在基于到期日为 T 的股票远期合约中公平价格的表达式及相应的对冲组合.

15. 给出在习题 14 中的看涨 - 看跌期权的平价公式.

16. 假设在例 5.4.2 的合约定价中，没有考虑来自 FTSE 的股票的红利. 那么所得的合约价格是偏高还是偏低，给出金融方面的论证，并给出所得合约价格的精确值.

17. 假设 V_t 是自融资投资组合的价值，像 5.4 节中一样，该投资组合由 ϕ_t 份额的定期支付红利的股票和 ψ_t 份额的现金债券所构成. 求出在该假设下满足 V_t 的自融资特征的微分方程.

18. 找出能复制例 5.4.3 中的远期合约的投资组合.

19. 基于 5.4 节中定期支付红利的股票，定价和对冲到期日为 T，敲定价格为 K 的欧式看涨期权. 根据方程 (5.5) 中计算远期合约价格的 Black-Scholes 公式给出你的结论.

20. 验证 5.5 节中远期合约价格和看涨期权的价值，并求出相应的自融资复制投资组合.

137

21. 证明：如果两种可交易资产在 T 时刻有相同的价值，但它们必在 $s < T$ 时刻以正概率取不同的值，那么市场上存在套利机会.

138

第 6 章　具有不同收益的期权

引　言

到目前为此绝大部分期权具体例子是关于标准看涨和看跌期权的例子. 这样的期权有流通的市场，它们的价格是比较好确定的且有竞争优势. 那些非标准看涨或看跌期权称作奇异期权. 引入这样的期权可以拓宽银行业务范围或去满足对冲和顾客的投机需要. 这样的期权通常没有市场且它们的买卖仅在"场外"进行. 尽管这样的奇异期权的定价和对冲规则与标准期权完全一致，但它们的风险管理尤需注意. 这样的奇异期权不仅不像标准期权那样能够流通，而且它们的收益还经常是不连续的，因此当临近到期日时就可能有很大的"增量"使得很难进行对冲.

本章主要研究几种奇异期权的例子. 对于最简单奇异期权的定价和对冲就是"打包"(package)，即期权的收益是标准大众化期权和原生资产的一个组合. 我们已经在 1.1 节中遇到过这种期权，在这里再把它的定价作为一个习题. 接下来的几个最简单的例子是欧式期权，即期权在到期日的收益是一个关于股票价格的函数. 在 6.1 节中考虑的收益是不连续的而且还发现潜在的对冲问题. 在 6.2 节中转而关注多阶段期权. 这种期权允许在期权有效期中作出判定或重新设置条件. 本章剩下的部分用来研究路径依赖期权. 在 6.3 节中用与 3.3 节中相同的方法对回望期权和障碍期权进行定价. 在 6.4 节中将简单地讨论一下亚式期权，它的收益依赖于在期权的整个有效期内股票的平均价格. 最后在 6.5 节中简单地介绍一下在连续时间下美式期权的定价.

6.1　具有不连续收益的欧式期权

我们在基本的 Black-Scholes 模型框架下讨论. 即市场是由一个在 t 时刻价值为 $B_t = \mathrm{e}^{rt}$ 的无风险现金债券和一个单风险资产构成的，这个单风险资产的价格 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 遵循几何布朗运动.

5.2 节中在这个框架下建立了关于欧式期权定价和对冲组合的显式表达式. 特别是, 若在到期日 T 时刻期权的收益为 $C_T = f(S_T)$, 那么在 t 时刻 $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 期权的价值为 139

$$
\begin{aligned}
V_t &= F(t, S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)} f(S_T) \Big| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}\right)\right) \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y, \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是鞅测度, 而且权益 $f(S_T)$ 能被在 t 时刻由 ϕ_t 份额股票和 $\psi_t = \mathrm{e}^{-rt}(V_t - \phi_t S_t)$ 份额现金债券所构成的投资组合所复制, 这里

$$
\phi_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)\bigg|_{x=S_t}. \qquad (6.2)
$$

数学上如何精确计算这个积分将在本书的后面给以讨论. 然而, 我们将会看到, 当收益是 S_T 的不连续函数时过多地考虑假设条件会导致对这些公式有用性的怀疑.

例6.1.1[数字期权 (Digital option)] 数字期权有时也称为两值期权或现金或无值期权, 它的收益是由一个 Heaviside 函数给出的. 例如, 一个敲定价格为 K 的数字看涨期权在到期日 T 时刻有收益

数字期权和针风险

$$
C_T = \begin{cases} 1, & S_T \geqslant K, \\ 0, & S_T < K. \end{cases}
$$

求该期权的定价和对冲公式.

解 为了求解公式 (6.1) 必须确定 y 的范围, 对于 y

$$
S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}\right) > K.
$$

整理可知当 $y > d$ 时上式成立, 其中

$$
d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right).
$$

记 Φ 为正态分布函数并把它代入公式 (6.1) 可得 140

$$
\begin{aligned}
V_t &= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \Phi(-d) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \Phi(d_2),
\end{aligned}
$$

其中

$$d_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right),$$

与例 5.2.2 中一样.

再来看对冲问题. 由 (6.2) 可知在 t 时刻复制投资组合中所持股票的份额为

$$\begin{aligned}\phi_t &= e^{-r(T-t)}\frac{1}{S_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\\ &\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2(T-t)\sigma^2}\left(\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2\right).\end{aligned}$$

当 $t\to T$ 时，在 $S_T=K$ 上 ϕ_t 收敛到集中于 $S_T=K$ 点的 δ 函数和 $1/K$ 的乘积. 考虑到当 $t\to T$ 时复制投资组合的涵义. 除了 $S_t=K$，ϕ_t 是趋近于零的，但是若 S_t 趋近于 K，那么 ϕ_t 将变得非常大. 现在如果在临近到期日时，资产的价格趋近于 K，那么它的值就会以很高的概率在到期日之前多次越过值 $S_t=K$. 但是如果资产价格在趋近到期日时在敲定价格左右摆动，那么对于这个对冲组合来说我们的策略就是迅速地买进或卖出大量的原生资产. 由于市场不如在 Black-Scholes 模型中所设想的那样完善，并且不能立即的买进或卖出，那么资产价格微小的变动 (更不必说交易费用) 所带来的风险就能轻易超出出售这种数字期权引起的最大负债. 这就是与这种期权相关的所谓“针”风险 (pin risk). □

如果我们能够克服关于数字期权的 Black-Scholes 定价的有效性的忧虑，那么就可以把它们作为其他奇异期权的标准组件. 事实上，由于在 T 时刻收益为 $\mathbf{1}_{[K_1,K_2]}(S_T)$ 的期权能够通过买进一份敲定价为 K_2 到期日为 T 的数字期权和卖出一份敲定价为 K_1 到期日为 T 的数字期权来复制，那么在理论上就可以通过数字期权的线性组合 (可能是无限的) 来复制欧式期权从而求出它的定价公式.

6.2 多阶段期权

某些期权允许在期权有效期中做出判定或重新设置条件. 一个具体的例子就是第 2 章习题 3 中的远期启动期权. 为了解释如何为多阶段期权定价，我们来求一个远期启动期权的 Black-Scholes 定价公式.

例6.2.1 (远期启动期权) 一个远期启动期权是这样一张合约：持有人在 T_0 时刻在没有额外费用下拥有一份敲定价为 S_{T_0} 和到期日为 $T_1>T_0$ 的期权. 若无风险利率为 r，求 $t<T_1$ 时刻这份期权在 Black-Scholes 模型下的价

141

格.

解 先假设 $t \in [T_0, T_1]$. 那么由 t 可知 S_{T_0} ，因此这份期权的价值就是一份敲定价格为 S_{T_0} 和到期日为 T_1 的欧式看涨期权的价值，即

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T_1-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_{T_1} - S_{T_0})_+ \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是个概率测度，在该测度下原生资产贴现价格是个鞅. 特别是，在 T_0 时刻，根据例 5.2.2 有

$$V_{T_0} = S_{T_0}\Phi(d_1) - S_{T_0}\mathrm{e}^{-r(T_1-T_0)}\Phi(d_2).$$

其中

$$d_1 = \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - T_0)}{\sigma\sqrt{T_1 - T_0}}, \qquad d_2 = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - T_0)}{\sigma\sqrt{T_1 - T_0}}.$$

即

$$\begin{aligned} V_{T_0} &= S_{T_0}\left\{\Phi\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T_1 - T_0}}{\sigma}\right) - \mathrm{e}^{-r(T_1-T_0)}\Phi\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T_1 - T_0}}{\sigma}\right)\right\} \\ &= cS_{T_0} \end{aligned}$$

其中 $c = c(r, \sigma, T_0, T_1)$ 与资产价格无关.

为了求得 $t < T_0$ 时期权的价格，我们注意到在 T_0 时刻的期权在时间区间 $0 \leqslant t \leqslant T_0$ 上能由 c 份原生资产构成的投资组合所精确复制. 因此对 $t < T_0$，期权的价格由 cS_t 给出. 特别是，在零时刻期权的价格为

$$V_0 = S_0\left\{\Phi\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T_1 - T_0}}{\sigma}\right) - \mathrm{e}^{-r(T_1-T_0)}\Phi\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{T_1 - T_0}}{\sigma}\right)\right\}.$$

□

注意，为了定价远期启动期权，我们是从 T_1 时刻向后倒推. 这反映了一个一般性的策略. 给一个到期日为 T_1 且在其中某个时刻 T_0 设置条件的多时段期权定价，它分为下列几个步骤.

一般策略

多时段期权的定价：

1. 求出 T_1 时刻期权的收益.
2. 根据 Black-Scholes 公式求出 $t \in [T_0, T_1]$ 时刻期权的价值.
3. 在 T_0 时刻应用合约条件.
4. 根据 Black-Scholes 公式求出 $t \in [0, T_0]$ 时刻期权的值.

我们现在根据上面的步骤来求下面两种期权的值.

例6.2.2 (比率衍生物) 比率衍生物是这样一种合约：两个时刻 $0 < T_0 < T_1$ 是固定的，到期日为 T_1，此时收益为 S_{T_1}/S_{T_0} . 求 $t < T_1$ 时期权的价值.

142

解 先假定 $t \in [T_0, T_1]$，此时 S_{T_0} 是已知的，于是

$$V_t = \frac{1}{S_{T_0}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T_1-t)}S_{T_1}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

这里在 $\mathbb{Q}$ 下贴现的资产价格是一个鞅，因此 $V_t = S_t/S_{T_0}$. 特别是 $V_{T_0} = 1$. 因此对于 $t < T_0$ 显然期权的价值为 $\mathrm{e}^{-r(T_0-t)}$. □

远期启动期权和比率衍生物都是小集团期权的例子，在这里敲定价格被设置为关于有效期内某个 T_0 时刻股票价格的函数.

复合期权

一类相当复杂的例子就是复合期权. 它们称为“期权的期权”，在这类期权中原生资产的角色被一种期权自己所承担. 复合期权有 4 种基本类型：看涨的看涨期权 (call-on-call)，看涨的看跌期权 (call-on-put)，看跌的看涨期权 (put-on-call) 和看跌的看跌期权 (put-on-put).

例6.2.3 (看涨的看涨期权) 描述一个看涨的看涨期权必须要给定两个执行价格 K_0, K_1 和两个到期日 $T_0 < T_1$. 这个“原生”期权是一个敲定价格为 K_1，到期日为 T_1 的欧式看涨期权. 看涨的看涨期权合约赋予持有人这样的权利，在 T_0 时刻以 K_0 价格买进这份原生期权. 求 $t < T_0$ 时该期权的价值.

解 我们已经知道如何去求原生看涨期权的价值. 由 Black-Scholes 公式可知 T_0 时刻期权的价值为

$$\begin{aligned} C(S_{T_0}, T_0; K_1, T_1) &= S_{T_0}\Phi(d_1(S_{T_0}, T_1 - T_0, K_1)) \\ &\quad -K_0\mathrm{e}^{-r(T_1-T_0)}\Phi(d_2(S_{T_0}, T_1 - T_0, K_1)) \end{aligned}$$

其中

$$d_1(S_{t_0}, T_1 - T_0, K_1) = \frac{\log\left(\frac{S_{T_0}}{K_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - T_0)}{\sigma\sqrt{T_1 - T_0}},$$

$$d_2(S_{t_0}, T_1 - T_0, K_1) = d_1(S_{t_0}, T_1 - T_0, K_1) - \sigma\sqrt{T_1 - T_0}.$$

那么复合期权在 T_0 时刻的价值为

$$V(T_0, S_{T_0}) = (C(S_{T_0}, T_0; K_1, T_1) - K_0)_+.$$

再一次利用 Black-Scholes 公式可得 $t < T_0$ 时刻期权的价值为

$$V(t, S_t) = \mathrm{e}^{-r(T_0-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(C(S_{T_0}, T_0, K_1, T_1) - K_0)_+\middle|\mathcal{F}_t^S\right] \tag{6.3}$$

143

这里资产的贴现价格在 $\mathbb{Q}$ 下是一个鞅. 由

$$S_{T_0}=S_t\exp\left(\sigma Z\sqrt{T_0-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_0-t)\right),$$

这里在 $\mathbb{Q}$ 下，$Z\sim N(0,1)$，公式 (6.3) 现在给出用二元正态随机变量的累积分布函数表示的期权价值的解析表达式. 记

$$f(y)=S_0\exp\left(\sigma y\sqrt{T_0-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_0-t)\right)$$

并显式定义

$$x_0=\inf\{y\in\mathbb{R}:C(f(y),T_0;K_1,T_1)\geqslant K_0\}.$$

现在

$$\log\left(\frac{f(y)}{K_1}\right)=\log\left(\frac{S_0}{K_1}\right)+\sigma y\sqrt{T_0-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_0-t),$$

因此记

$$\hat{d}_1(y)=\frac{\log(S_0/K_1)+\sigma y\sqrt{T_0-t}+rT_1-\sigma^2T_0+\frac{1}{2}\sigma^2T_1}{\sigma\sqrt{T_1-T_0}},$$

$$\hat{d}_2(y)=\frac{\log(S_0/K_1)+\sigma y\sqrt{T_0-t}+rT_1-\frac{1}{2}\sigma^2T_1}{\sigma\sqrt{T_1-T_0}}.$$

可得

$$V(t,S_t)=\mathrm{e}^{-r(T_0-t)}\int_{x_0}^{\infty}\left(f(y)\Phi(\hat{d}_1(y))-K_0\mathrm{e}^{-r(T_1-T_0)}\Phi(\hat{d}_2(y))-K_0\right)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y.$$

□

6.3 回望期权和障碍期权

现在我们来讨论依赖路径的期权的第一个例子. 它是这样一类期权：期权在到期日的收益取决于合约有效期内原生资产价格演化的历程.

通常我们用 $\{S_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 表示合约有效期内原生资产的价格. 在本节将讨论这样一类期权，它们在到期日的收益不仅依赖于 S_T，而且还同时依赖于原生资产价格在 $[0,T]$ 上的最大值和最小值或其中之一. 144

记号： 记

$$S_*(t)=\min\{S_u:0\leqslant u\leqslant t\},$$
$$S^*(t)=\max\{S_u:0\leqslant u\leqslant t\}.$$

定义6.3.1 [回望看涨期权 (lookback call)] 回望看涨期权赋予持有人这样的权利，在 T 时刻购买一份股票，购买价为股票价格在 $[0,T]$ 上的最小值. 此时收益为

$$C_T = S_T - S_*(T).$$

定义6.3.2[障碍期权 (Barrier options)] 障碍期权是这样一份期权，如果原生资产价格触及到提前设置的障碍，那么期权就生效或失效. 这里有两种基本类型:

1. 敲入障碍期权

(a) 上升敲入障碍期权: 当从下到上触及障碍时期权才生效,

(b) 下降敲入障碍期权: 当从上到下触及障碍时期权才生效.

2. 敲出障碍期权

(a) 上升敲出障碍期权: 当从下到上触及障碍时期权失效,

(b) 下降敲出障碍期权: 当从上到下触及障碍时期权失效.

例6.3.3 仅当股票的价格在 T 之前的某个时刻跌落到预先设置的水平 c 之下时，下降敲入看涨期权的收益才为 $(S_T-K)_+$，否则期权是无效的. 即期权的收益为

$$C_T = \mathbf{1}_{\{S_*(T)\leqslant c\}}(S_T-K)_+.$$

在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，我们总是能把这类期权的值表示为一个贴现的期望值. 因此期权在零时刻的价值可记为

$$V(0,S_0) = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T] \tag{6.4}$$

其中 r 是无风险借贷利率，贴现的股票价格是一个 $\mathbb{Q}$- 鞅. 然而，为了精确地计算出 (6.4) 中障碍期权的期望，需要知道在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下 $(S_T,S_*(T))$ 和 $(S_T,S^*(T))$ 的联合分布. 幸好我们在第 3 章做了很多这方面的工作.

股票价格和它最小值的联合分布

在引理 3.3.4 中我们建立了布朗运动和它的最大值的联合分布. 特别是，如果 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准的 $\mathbb{P}$- 布朗运动，记

$$M_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s,$$

对于 $a>0$ 且 $x\leqslant a$ 有

$$\mathbb{P}[M_t\geqslant a, W_t\leqslant x] = 1-\Phi\left(\frac{2a-x}{\sqrt{t}}\right).$$

145

由对称性，记 $m_t=\min\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W_s$，对于 $a<0$ 且 $x\geqslant a$ 有

$$\mathbb{P}[m_t\leqslant a, W_t\geqslant x] = 1-\Phi\left(\frac{-2a+x}{\sqrt{t}}\right),$$

或微分，若 $a<0$ 且 $x\geqslant a$, 则

$$\mathbb{P}[m_T\leqslant a, W_T\in \mathrm{d}x] = p_T(0,-2a+x)\mathrm{d}x = p_T(2a,x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\big(-|x-y|^2/2t\big).$$

把这些结果与 Girsanov 定理 (的两个应用) 结合起来就可以得到在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下 $(S_T,S^*(T))$ 和 $(S_T,S_*(T))$ 的联合分布.

通常，在市场测度 $\mathbb{P}$ 下

$$S_t=S_0\exp(\nu t+\sigma W_t),$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$- 布朗运动. 倘若暂且假定 $\nu=0$，那么 $S_t=S_0\exp(\sigma W_t)$，而且 $S_*(t)=S_0\exp(\sigma m_t)$，$S^*(t)=S_0\exp(\sigma M_t)$. 在这个特殊情形下，股票的价格和它的最小值 (或最大值) 的联合分布可由 (W_t,m_t) (或 (W_t,M_t)) 推导而来. 当然通常情况下，不管是在市场测度 $\mathbb{P}$ 下还是在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，ν 都不为 0. 我们采取的策略不仅转换到鞅测度下使用 Girsanov 定理，而且有时还要转换到一个等价测度，使得在该测度下 $S_t=S_0\exp(\sigma W_t)$.

引理6.3.4 设 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由 $Y_t=bt+X_t$ 给出的，其中 b 是一个常数，$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 布朗运动. 记 $Y_*(t)=\min\{Y_u:0\leqslant u\leqslant t\}$，则

$$\mathbb{Q}[Y_*(T)\leqslant a,Y_T\in \mathrm{d}x]=\begin{cases}p_T(bT,x)\mathrm{d}x, & x<a,\\ \mathrm{e}^{2ab}p_T(2a+bT,x)\mathrm{d}x, & x\geqslant a,\end{cases}$$

同上，$p_t(x,y)$ 表示布朗转移密度函数.

证 根据 Girsanov 定理，存在一个等价于测度 $\mathbb{Q}$ 的测度 $\mathbb{P}$，在这个测度下 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T}=\exp\left(-bX_T-\frac{1}{2}b^2T\right).$$

注意此式仅通过 X_T 依赖于 $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$. 事件 $\{Y_*(T)\leqslant a,Y_T\in\mathrm{d}x\}$ 的 $\mathbb{Q}$- 概率为它的 $\mathbb{P}$- 概率乘以 $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T}$ 在 $Y_T=x$ 时的值. 当前

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\exp\left(bX_T+\frac{1}{2}b^2T\right)=\exp\left(bY_T-\frac{1}{2}b^2T\right).$$

因此对于 $a<0$ 和 $x\geqslant a$ 有 146

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[Y_*(T)\leqslant a,Y_T\in\mathrm{d}x] &= \mathbb{P}[Y_*(T)\leqslant a,Y_T\in\mathrm{d}x]\exp\left(bx-\tfrac{1}{2}b^2T\right)\\ &= p_T(2a,x)\exp\left(bx-\tfrac{1}{2}b^2T\right)\mathrm{d}x \qquad (6.5)\\ &= \mathrm{e}^{2ab}p_T(2a+bT,x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

显然，对于 $x \leqslant a$ ，$\{Y_*(T) \leqslant a, Y_T \in \mathrm{d}x\} = \{Y_T \in \mathrm{d}x\}$ ，故对于 $x \leqslant a$ 有

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[Y_*(T) \leqslant a, Y_T \in \mathrm{d}x] &= \mathbb{Q}[Y_T \in \mathrm{d}x] \\ &= \mathbb{Q}[bT + X_T \in \mathrm{d}x] \\ &= p_T(bT, x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

证毕. □

对 (6.5) 两边关于 a 微分，根据联合密度，对于 $a < 0$ 可得

$$\mathbb{Q}[Y_*(T) \in \mathrm{d}a, Y_T \in \mathrm{d}x] = \frac{2\mathrm{e}^{2ab}}{T}|x - 2a|p_T(2a + bT, x)\mathrm{d}x\mathrm{d}a, \qquad x \geqslant a.$$

如果 $x < a$ 或 $a > 0$，联合密度显然为 0. 在习题 13 中要求去求 $\mathbb{Q}$ 测度下 Y_T 和 $Y^*(T)$ 的联合分布.

价格表达式

由第 5 章可知，在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，$S_t = S_0 \exp(\sigma Y_t)$，其中

$$Y_t = \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}t + X_t$$

且 $\{X_t\}_{t \geqslant o}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 布朗运动. 因此通过应用这些结论与 $b = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$, 现在就可以计算出到期日为 T，收益依赖于股票在 T 时刻的价格和它在合约有效期内最小值 (或最大值) 的任何期权的价格. 如果收益为 $C_T = g(S_*(T), S_T)$ 且 r 为无风险利率，那么期权在零时刻的价值为

$$\begin{aligned} V(0, S_0) &= \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(S_*(T), S_T)] \\ &= \mathrm{e}^{-rT}\int_{a=-\infty}^{0}\int_{x=a}^{\infty} g(S_0\mathrm{e}^{\sigma x}, S_0\mathrm{e}^{\sigma a})\mathbb{Q}[Y_*(T) \in \mathrm{d}a, Y_T \in \mathrm{d}x]. \end{aligned}$$

例6.3.5(下降敲入看涨期权) 求下降敲入看涨期权在零时刻的价格，它在 T 时刻的收益为

$$C_T = \mathbf{1}_{\{S_*(T) \leqslant c\}}(S_T - K)_+$$

其中 c 是一个 (正的) 预先设置的小于 K 的常数.

解 利用 $S_t = S_0 \exp(\sigma Y_t)$，因此收益又可记为

$$C_T = \mathbf{1}_{\{Y_*(T) \leqslant \frac{1}{\sigma}\log(c/S_0)\}}(S_0\mathrm{e}^{\sigma Y_T} - K)_+.$$

147

记 $b = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$，$a = \frac{1}{\sigma}\log(c/S_0)$ 且 $x_0 = \frac{1}{\sigma}\log(K/S_0)$，可得

$$V(0, S_0) = \mathrm{e}^{-rT}\int_{x_0}^{\infty}(S_0\mathrm{e}^{\sigma x} - K)\mathbb{Q}(Y_*(T) \leqslant a, Y_T \in \mathrm{d}x).$$

根据上面所得的 $(Y_*(T), Y_T)$ 的联合分布的表达式可得

$$V(0,S_0)=\mathrm{e}^{-rT}\int_{x_0}^{\infty}(S_0\mathrm{e}^{\sigma x}-K)\mathrm{e}^{2ab}p_T(2a+bT,x)\mathrm{d}x.$$

这里我们用到这样一个事实：由于 $c<K$, 所以 $x_0\geqslant a$. 首先观察

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-rT}\int_{x_0}^{\infty}K\mathrm{e}^{2ab}p_T(2a+bT,x)\mathrm{d}x &= K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{e}^{2ab}\int_{(x_0-2a-bT)/\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\\ &= K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{e}^{2ab}\int_{-\infty}^{(2a+bT-x_0)/\sqrt{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\\ &= K\mathrm{e}^{-rT}\left(\frac{c}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{2a+bT-x_0}{\sqrt{T}}\right)\\ &= K\mathrm{e}^{-rT}\left(\frac{c}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{\log(F/K)-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

其中 $F=\mathrm{e}^{rT}c^2/S_0$.

同理,

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-rT}\int_{x_0}^{\infty} S_0\mathrm{e}^{\sigma x}\mathrm{e}^{2ab}p_T(2a+bT,x)\mathrm{d}x\\ &= S_0\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{e}^{2ab}\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{(x-(2a+bT))^2-2\sigma xT}{2T}\right)\mathrm{d}x\\ &= S_0\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{e}^{2ab}\int_{(x_0-(2a+bT)-\sigma T)/\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\\ &\quad\times\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2T+2a\sigma+b\sigma T\right)\\ &= \mathrm{e}^{-rT}\left(\frac{c}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}F\Phi\left(\frac{\log(F/K)+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right).\end{aligned}$$

与例 5.2.2 相比可得

$$V(0,S_0)=\left(\frac{c}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}C\left(\frac{c^2}{S_0},0;K,T\right),$$

其中 $C(x,t;K,T)$ 是敲定价格为 K，到期日为 T，股票价格在 t 时刻为 x 的欧式看涨期权在 t 时刻的价格. □

障碍期权的价格也可表示为一个偏微分方程的解.

例6.3.6 (下降敲出看涨期权) 除非在合约的有效期内原生资产的价格跌落到预先设置的障碍 c 之下，下降敲出看涨期权有与欧式看涨期权一样的收益 $(S_T-K)_+$,在此情形下期权被“敲出”，终止有效.

148

如果 $S_t = x$，那么记 $V(t,x)$ 为这样一个期权在 t 时刻的值，并假定 $K > c$，$V(t,x)$ 是对于 $(t,x) \in [0,T] \times [c,\infty)$，符合下列边界条件的解

$$\begin{aligned} V(T,S_T) &= (S_T - K)_+, \\ V(t,c) &= 0, \quad t \in [0,T], \\ \frac{V(t,x)}{x} &\to 1, \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

最后一个边界条件意味着当 $S_t \to \infty$ 时，资产价格在 T 时刻之前触及到障碍水平 c 的概率趋近于零.

习题 16 给出了含有这类边界条件的 Black-Scholes 偏微分方程的一种解法.

当然越来越多复杂的障碍期权可能是浮动的. 例如，一个双敲出期权 (double knock-out option) 只有当股票的价格在合约的有效期中处于 $[c_1, c_2]$ 中时才是有效的. 求这类合约的概率定价公式需要知道 $(S_T, S_*(T), S^*(T))$ 的联合分布. 在单一障碍期权情形下，这种联合分布是利用 Girsanov 定理从 (W_T, m_T, M_T) 的联合分布推导而来的，其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是个 $\mathbb{P}$- 布朗运动，并且 $\{m_t\}_{t\geqslant 0}$，$\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 分别是它的最小值和最大值. 这依次由下式给出，

$$\mathbb{P}[W_T \in \mathrm{d}y, a < m_T, M_T < b] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{ p_T(2n(a-b), y) - p(2n(b-a), y-2a) \Big\} \mathrm{d}y;$$

可以参见 Freedman (1971) 给出的证明. 那么一个显式定价公式将是无限项和的形式. 在习题 20 中可以通过直接求解 Black-Scholes 微分方程得到定价公式.

概率或 PDE?

如同第 5 章的习题 7 一样，在本章后面的习题中我们又将看到，Black-Scholes 偏微分方程通过转换成热传导方程 (有合适的边界条件) 来求解. 这与概率的方法完全一致，即把期望价格转换成一个布朗运动函数的期望.

6.4　亚式期权

亚式期权的收益是资产价格在合约整个有效期内的平均值的函数. 例如，敲定价为 K 到期日为 T 的亚式看涨 (Asian call) 期权的收益为

$$C_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t \mathrm{d}t - K \right)_+ .$$

149

显然 $C_T \in \mathcal{F}_T$，因此通过第 5 章的 Black-Scholes 分析可以给出这类期权在零

时刻的价值为

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t \mathrm{d}t - K\right)_+\right]. \tag{6.6}$$

然而，计算这个积分是一件很不容易的事情，我们无法得到如前面章节一样比较漂亮的显式表达式.

在这篇文章中有许多变量. 例如，我们可能要求这样一个权益的值，它的收益为

$$C_T = f\left(S_T, \frac{1}{T}\int_0^T S_t \mathrm{d}t\right).$$

在 7.2 节中将去研究把这类权益 (和更复杂的权益) 的价格表示为一个多维的 Black-Scholes 方程的解的方法. 而且 (参见第 7 章习题 12)，根据这个方程的解也可以求出对冲组合的一个显式表达式. 然而，求多维的 Black-Scholes 方程要比求相应的一维情况困难得多，而且通常要借助于数值解法.

直接去求解 (6.6) 的困难主要在于，尽管与 S_T 的对数正态分布相比平均过程 $\frac{1}{T}\int_0^T S_t \mathrm{d}t$ 在任一时刻都有显式表达式，但是却没有分布函数表达式. 有些方法被认为可以克服这个困难，例如可以通过选择一个适当参数的对数正态分布来简单逼近这个平均过程的分布.

一个很自然的方法就是把连续时间离散成时刻 $t_1, \cdots, t_n$，然后取这些时刻上的平均值来取代连续平均. 当计算一个实际资产的连续平均很困难的时候，这种方法还是有一定的实际意义. 实际上，很多合约规定，它们的平均值可以通过这种离散的情形来计算，例如根据每天的结算价格来计算. 在数学上，连续平均 $\frac{1}{T}\int_0^T S_t \mathrm{d}t$ 可以用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$ 来代替. 尽管建立在离散模型上的期权价格的计算很快就变得不切实际，但还是可以用与多阶段期权一样的方法来处理 (见习题 21).

一个更进一步的方法是用几何平均来取代算术平均，即考虑用 $(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i})^{1/n}$ 来取代 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$. 由于几何平均服从对数正态分布 (习题 22)，因此对于亚式期权而言相应的近似定价公式就能够精确地求解出来. (在习题 23 中要求出一个基于几何平均的连续模型上的亚式看涨期权的定价公式.) 当然正数集合的算术平均总是大于几何平均，因此这种近似方法总是低估了亚式看涨期权的价格就不足为奇了.

6.5 美式期权

[150] 这里对美式期权的深入完整的探讨超出了我们的范围. 美式期权价格的显式表达式只在一些特殊的情况下才存在，因此一般情况下必须借助数值方法来求解. 一种方法是利用第 2 章中介绍的离散 (二项式树) 模型，另一种方法就是再把价格作为一个偏微分方程的解. 对于这个方程我们不给出严格的推导，而是利用第 2 章的结论对解的形式给以启发式解释.

离散情况 如第 2 章中所见，不支付红利的美式看涨期权的价格与欧式看涨期权的价格完全一样，因此这里着重探讨**美式看跌期权**(American put option). 这类期权赋予持有人这样的权利，在到期日 T 之前的任何时刻以价格 K 去购买一份股票.

如 2.2 节所解释的那样，在离散时间模型中，若 $V(n,S_n)$ 为 $n\delta t$ 时刻期权的价值，S_n 为 $n\delta t$ 时刻的资产价格，那么

$$V(n,S_n)=\max\Big\{(K-S_n)_+,\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-r\delta t}V(n+1,S_{n+1})|\mathcal{F}_n]\Big\},$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是个鞅测度，特别是，在任何时刻 $V(n,S_n)\geqslant(K-S_n)_+$ 恒成立. 可以看到在每个固定点 n，S_n 的可能值被边界值 $S_f(n)$ 分成两种区域，用 $S_f(n)$ 来表示：若 $S_n>S_f(n)$ 则最好持有期权，若 $S_n\leqslant S_f(n)$ 则最好终止持有期权. 称 $\{S_f(n)\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 为**执行边界** (exercise boundary).

在例 2.4.7 中我们得到了执行边界的一个性质. 我们证明了贴现的期权价格可以写成 $\tilde{V}_n=\tilde{M}_n-\tilde{A}_n$，其中 $\{\tilde{M}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅，$\{\tilde{A}_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是一个非减的可料过程. 期权在 $\tilde{A}_{n+1}\neq 0$ 时的首达时刻 $n\delta t$ 被执行. 总之，在终止区域内 $\tilde{A}_{n+1}\neq 0$ 且 $V_n=(K-S_n)_+$，那么当不在终止区域时，即当 $S_n>S_f(n)$ 时，$V(n,S_n)=M_n$.

在 $\tilde{A}_{n+1}\neq 0$ 时的首达时刻终止持有的策略是最优策略，在这个意义下，若记 $\mathcal{T}_N$ 为所有可能终止时刻的集合，这些终止时刻在 $\{0,1,\cdots,N\}$ 中取值，那么

$$V(0,S_0)=\sup_{\tau\in\mathcal{T}_N}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\mathrm{e}^{-r\tau}(K-S_\tau)_+\big|\mathcal{F}_0\big].$$

由于任意可行策略的执行时刻必是一个停时，这就是说期权的持有人不可能有其他更好的执行策略. 以公平价格为特征的最优化方法来自于习题 2.4 中要提供的，现在已经熟悉的套利方法.

连续时间 现在假设我们正式地讨论 2.6 节中的连续情形. 我们希望在这种条件下，$V(t,S_t)\geqslant(K-S_t)_+$ 也处处成立, 且对每个 t 我们可以定义 $S_f(t)$ 使得

当 $S_t > S_f(t)$ 时最优策略为继续持有期权，而 $S_t \leqslant S_f(t)$ 时则终止持有. 由于在终止区域 $V(t,S_t) = (K - S_t)_+$ ，而在继续持有区域 $V(t,S_t) = M_t$，其中贴现过程 $\{\tilde{M}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 鞅，且 $\mathbb{Q}$ 是等价于 $\mathbb{P}$ 的测度，在这个测度下股票的贴现价格是一个鞅. 由于 $\{\tilde{M}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 可以考虑作为欧式期权的贴现值，所以这就告诉我们在继续持有区域，$V(t,x)$ 必定满足 Black-Scholes 微分方程.

那么我们可以猜测在 $\{(t,x) : x > S_f(t)\}$ 上期权的价格 $V(t,x)$ 必定满足 Black-Scholes 方程，而在此区域外 $V(t,x) = (K - x)_+$. 如果我们给定一个关于 S_f 的适当的边界条件，那么可以把它作为 $V(t,x)$ 的一条性质. 但事实是 $S_f(t)$ 是一个自由边界(free boundary)，我们不能事先确定它的位置，因此这是一个非常复杂的问题. 151

由套利问题 (习题 25) 可知美式看跌期权的价格应该是连续的. 我们已经验证了 $V(t,S_f(t)) = (K - S_f(t))_+$. 由于如果期权的值为零在 $t < T$ 时刻去执行显然是不明智的，因此事实上我们有 $V(t,S_f(t)) = K - S_f(t)$. 现在假定当通过执行边界时 $V(t,x)$ 关于 x 是连续可微的 (这里我们将略去对它的证明). 由于

$$\begin{aligned} V(t,x) &= (K-x), \qquad \text{当} x \leqslant S_f \text{时}, \\ V(t,x) &\geqslant (K-x), \qquad \text{当} x > S_f \text{时}, \end{aligned}$$

那么在执行边界必定有 $\dfrac{\partial V}{\partial x} \geqslant -1$ ，假定在执行边界的某点上 $\dfrac{\partial V}{\partial x} > -1$ ，那么通过在选择执行的那些点上把股票的价格从 S_f 减少到 S_f^*，实际上就可以提高在这一点 $(t, S_f(t))$ 期权的价值. 这与最优执行策略是相矛盾的，因此在执行边界必有 $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -1$.

我们现在完全可以把 $V(t,x)$ 描述为一个自由边界值问题的解：

命题6.5.1 (美式看跌期权的价值) *记 $V(t,x)$ 为敲定价格为 K，到期日为 T 的一份美式看跌期权的价值，r 是无风险利率. $V(t,x)$ 有如下性质，对任一时间 $t \in [0,T]$ 存在一个数 $S_f(t) \in (0,\infty)$，使得当 $0 \leqslant x \leqslant S_f(t)$ 和 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，有*

$$V(t,x) = K - x, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV < 0.$$

且当 $t \in [0,T]$ 和 $S_f(t) < x < \infty$ 时，有

$$V(t,x) > (K-x)_+, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0.$$

在 $x = S_f(t)$ 上边界条件是期权价格过程关于 x 是连续可微的，关于时间 t 连续的，且

$$V(t,S_f(t)) = (K - S_f(t))_+, \qquad \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_f(t)) = -1.$$

此外，V 满足终止条件：

$$V(T,S_T)=(K-S_T)_+.$$

命题 6.5.1 的自由边界问题作为一个线性互补问题 (linear complementarity problem) 更容易分析. 若用下面的记号来表示

152

$$\mathcal{L}_{BS}f=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+rx\frac{\partial f}{\partial x}-rf,$$

则自由边界值问题可以表述为

$$\mathcal{L}_{BS}V(t,x)(V(t,x)-(K-x)_+)=0,$$

且满足 $\mathcal{L}_{BS}V(t,x)\leqslant 0, V(t,x)-(K-x)_+\geqslant 0, V(T,x)=(K-x)_+$，当 $x\to\infty$ 时 $V(t,x)\to\infty$，以及 $V(t,x)$ 和 $\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)$ 是连续的.

注意到这种表示方法就完全避开了对自由边界的明显依赖. 变分方法可以用来求解这类问题，而且边界可以从它的解中重新得出. 这些知识超出了我们在这里讲述的内容，要想了解更多的细节可参见 Wilmott，Howison & Dewynne (1995).

一个显式解

我们用一个美式期权少有的例子来结束本章的内容，这种美式期权能够得到显式表达式.

例6.5.2 (永久美式看跌期权) 永久美式看跌期权是一份持有人在任何时刻都可以实施的合约，它的收益为 $(K-S_t)_+$. 求一份不支付红利的永久美式看跌期权的价值.

解 我们简单地概述一下这个问题的两种解法，一种是通过命题 6.5.1 的自由边界问题来求解，另一种是通过期望价格来求解.

由于合约距离到期日的时间总是无限的，因此 $V(t,x)$ 是一个只关于 x 的函数，且对于所有 $t>0$ 和某个常数 α，执行边界必定形如 $S_f(t)=\alpha$. 只要 $S_t\leqslant\alpha$，期权就将实施. 由 Black-Scholes 方程可以得到一个常微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}+rx\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}-rV=0,\qquad\forall\, x\in(\alpha,\infty)\tag{6.7}$$

方程 (6.7) 的通解形式为 $V(x)=c_1x^{d_1}+c_2x^{d_2}$，这里 c_1,c_2,d_1 和 d_2 为常数. 满足边界条件

$$V(\alpha)=K-\alpha,\qquad\lim_{x\downarrow\alpha}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-1,\qquad\lim_{x\to\infty}V(x)=0$$

可得

$$V(x)=\begin{cases}(K-\alpha)(\frac{\alpha}{x})^{2r\sigma^{-2}}, & x\in(\alpha,\infty),\\(K-x), & x\in[0,\alpha],\end{cases}$$

其中

$$\alpha = \frac{2r\sigma^{-2}K}{2r\sigma^{-2}+1}.$$

解这个问题的另一种方法就是用 3.3 节的结论. 如上所述，对某个 $\alpha > 0$ 当股票价格第一次触及到水平 α 时，期权将被实施. 这就意味着期权的价值将是下面这种形式

153

$$V(0,S_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r\tau_\alpha}(K-\alpha)_+\right],$$

其中 $\tau_\alpha = \inf\{t > 0 : S_t \leqslant \alpha\}$. 我们根据 $\mathbb{Q}$- 布朗运动触及一条斜线的时间去重新记停时. 由于

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma X_t\right).$$

其中 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下是个标准的布朗运动，事件 $\{S_t \leqslant \alpha\}$ 等同于事件

$$\left\{-\sigma X_t - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \geqslant \log\left(\frac{S_0}{\alpha}\right)\right\}.$$

过程 $\{-X_t\}_{t\geqslant 0}$ 也是一个标准的 $\mathbb{Q}$- 布朗运动，因此在 3.3 节的记号中时间 τ_α 是由 $T_{a,b}$ 给出的，且

$$a = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{S_0}{\alpha}\right), \qquad b = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.$$

那么我们就可由命题 3.3.5 得到 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r\tau_\alpha}\right]$，并且再在 α 上取最大值从而得出结论. □

习 题

1. 令 K_1 和 K_2 为固定的实数，且 $0 < K_1 < K_2$. 一个双限期权 (collar option) 有收益

$$C_T = \min\{\max\{S_T, K_1\}, K_2\}.$$

求这份期权的 Black-Scholes 定价公式.

2. 在一份远期合约中与多头有关的最大可能损失是多少？空头呢？

考虑这样一个衍生产品，在到期日对于多头持有人来说它的收益为

$$C_T = \min\{S_T, F\} - K,$$

其中对于原生股票来说 F 是一个标准的远期价格且 K 是一个常数. 因此构造这样的一份合约以便在敲定的时刻它的值为零. 求应该写入这份合约中的 K 值的一个表达式. 对于多头或空头持有人来说现在它的最大可能损失又是多少呢?

3. 敲定价格为 K 的**数字看跌期权**(digital put option) 在 T 时刻有收益

$$C_T = \begin{cases} 0, & S_T \geqslant K, \\ 1, & S_T < K. \end{cases}$$

154 求数字看跌期权的 Black-Scholes 定价公式和数字期权的看涨 - 看跌平价公式.

4. **数字看涨期权** (digital call option) 在例 6.1.1 中我们求出了数字看涨期权的价格. 这里有另外一种求解方法:

(a) 用 Feynman-Kac 随机表示定理求出一个到期日为 T 和敲定价格为 K 的数字看涨期权的值满足的偏微分方程.

(b) 证明用标准欧式看涨期权的 Δ 来解 (a) 中求出的偏微分方程.

(c) 因此或否则通过解 (a) 中的方程来求数字看涨期权的价值.

5. 一个到期日为 T 和敲定价格为 K 的**资产或无值** (asset-or-nothing) 看涨期权有收益

$$C_T = \begin{cases} S_T, & S_T \geqslant K, \\ 0, & S_T < K. \end{cases}$$

求这样一个期权的 Black-Scholes 定价和对冲公式. 若资产价格在临近 T 时刻时趋近于 K，那么此时在复制的投资组合中所持有的股票将发生什么变化? 请加以解释.

6. 构造一个投资组合，它完全由现金或无值期权与资产或无值期权组成，其中这些期权在 T 时刻的价值与敲定价为 K 的欧式看涨期权在到期日 T 时的价值完全一样.

7. 在 6.1 节中我们看到对于某个在到期日收益不连续的期权，在临近到期日时复制的投资组合中所持有的股票可能发生振荡. 若收益是连续的会发生这种现象吗?

8. **迟付期权** (pay-later option) 这种期权也称作**条件溢价期权** (contingent premium option)，是个标准的欧式期权，除了购买者仅在期权到期日且期权是在实值时支付溢价. 由于溢价被选定因此期权在零时刻的值为零. 这种期权等价于一个由一份到期日为 T 和敲定价格为 K 的标准欧式看涨期权和 $-V$ 份到期日为 T 的数字看涨期权组成的投资组合，其中 V 是该期权的溢价.

(a) 该投资组合在零时刻持有的价值是多少?

(b) 求 V 的一个表达式.

(c) 如果一个投机者参入这样一个合约，那么从她的视角来说会有什么方法?

9. **棘轮期权** (ratchet option) 两轮棘轮看涨期权描述如下. 在零时刻初始敲定价格 K 被设定. 在 $T_0 > 0$ 时刻敲定价格被重新设置为 S_{T_0}，即原生资产在 T_0 时刻的

价值. 如果 $S_{T_1}-S_{T_0}$ 是正的，那么在到期日 $T_1>T_0$ 持有人的收益为敲定价格为 S_{T_0} 的看涨期权的收益加上 $S_{T_1}-S_{T_0}$，即收益为 $(S_{T_1}-S_{T_0})_+ + (S_{T_0}-K)_+$.

如果 $(S_{T_0}-K)$ 是正的，那么中间利润 $(S_{T_0}-K)_+$ 称为"禁闭" (locked in)，为什么？对于 $0<t<T_1$ 求该期权的价值.

155

10. **选择期权** (chooser option)　一个选择期权由两个敲定价 K_0 和 K_1，与两个到期日 $T_0<T_1$ 给定. 在 T_0 时刻持有人拥用以价格 K_0 去购买一份到期日为 T_1 和敲定价格为 K_1 的看涨或看跌期权的权利.

该期权在 T_0 时刻的价值是多少？在特殊情形 $K_0=0$ 中，用看跌－看涨期权平价公式去把它表示为适当选定的敲定价和到期日的看涨期权与看跌期权的值的和，从而求期权在零时刻的价值.

11. **期货期权** (options on futures)　在我们的简单模型中无风险利率是确定的，远期价格与期货价格一致. 在一个支付日为 $T_1>T_0$ 的原生期货合约中，到期日为 T_0 和敲定价格为 K 的欧式看涨期权在 T_0 时刻支付给持有人期货合约中的多头和一定数量的钱 $(F(T_0,T_1)-K)_+$，其中 $F(T_0,T_1)$ 为期货合约在 T_0 时刻的价值. 求该期权在零时刻的价值.

12. 利用例 6.2.3 中的模型求看跌的看跌期权的价值.

通过考虑由买入一份看涨的看跌期权和卖出一份看跌的看跌期权 (有相同敲定价和到期日) 所得的投资组合得到一个复合期权的看跌－看涨平价关系式，从而写出复合期权的所有 4 种类型的价格.

13. 令 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 由 $Y_t=bt+X_t$ 给定，其中 b 是个常数且 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 布朗运动. 记 $Y^*(t)=\max\{Y_u:0\leqslant u\leqslant t\}$，求 $\mathbb{Q}$ 下 $(Y_T,Y^*(T))$ 的联合分布.

14. 由具有相同敲定价格和到期日的下降敲入看涨期权与下降敲出看涨期权组成的投资组合的价值是多少？

15. 若 $c>K$，求一个有障碍 c 且敲定价格为 K 的下降敲出看涨期权在到期日 T 的价值.

16. 求例 6.3.6 中的下降敲出看涨期权的价值一种方法是，把它表示为鞅测度下的一个期望，并利用我们关于布朗运动和它的极小值的联合分布的知识. 另外一种方法是直接求解偏微分方程，这也正是本习题的目的.

(a) 用第 5 章习题 7 中的模型把该定价方程转换成热传导方程，这个热传导方程的边界条件是什么？

(b) 求解所得的热传导方程，例如可用"镜像法".[若你对这种方法不熟悉，可参见 Wilmott,Howison & Dewynne (1995).]

(c) 代回原变量得到偏微分方程的解.

156

17. **一个美式现金或无值看涨期权** (American cash-or-nothing call option) 可在

任意时刻 $t \in [0,T]$ 被执行. 若在 t 时刻被执行则它的收益为

$$\begin{array}{ll} 1, & \text{当} S_t \geqslant K \text{时}, \\ 0, & \text{当} S_t < K \text{时}. \end{array}$$

问该期权将在什么时候被执行？并求它的价值.

18. 假定例 6.3.5 中的下降敲入看涨期权被修正为：若期权永不生效，即股票价格永不触及障碍，那么持有人收到回扣 Z. 求该修正期权的值.

19. **永久期权** (perpetual option) 是没有到期日的期权. 例如，一个永久美式现金或无值看涨期权可在任何时候被执行. 若在 t 时刻被执行，当 $S_t \geqslant K$ 时它的收益为 1，当 $S_t < K$ 时它的收益为 0. 问该期权永不被执行的概率是多少？

20. 把双重敲出看涨期权的价值表示为一个有适当选定边界条件的偏微分方程的解，模仿习题 16 中的方法把它的价格表示为无限和的形式.

21. 计算敲定价格为 K 的亚式看涨期权的价值，其中股票价格的平均值是在两个样本时刻 0 和 T 的基础上被计算的，这里 T 为合约的到期日.

当有 3 个样本时刻 0，$T/2$ 和 T 时，求相应合约的值的表达式.

22. 假设 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 遵循 $\mathbb{P}$ 下的几何布朗运动. 令 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ 为固定时刻且定义

$$G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{1/n}.$$

证明 G_n 在 $\mathbb{P}$ 下服从对数正态分布.

23. 资产价格 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 在市场测度 $\mathbb{P}$ 下遵循几何布朗运动. 定义

$$Y_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S_t \mathrm{d}t\right).$$

假设一个亚式看涨期权在 T 时刻的收益为 $(Y_T - K)_+$. 求这样的期权在零时刻的价格的显式表达式.

24. 用套利方法证明，若 $V(0,S_0)$ 是到期日为 T 和敲定价格为 K 且不支付红利的美式看跌期权的公平价格，那么记 $\mathcal{T}_T$ 为在 $[0,T]$ 中取值的所有可能的停时所组成的集合，则

157

$$V(0,S_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r\tau}(K-S_\tau)_+ \middle| \mathcal{F}_0\right].$$

25. 考虑不支付红利的美式看跌期权的价值. 证明，若期权的价值 (作为股票价格的函数) 在某些无穷小的时段上间断，那么完全由这些期权组成的投资组合将存在套利机会.

注释　这意味着不是所有的期权的价格都是连续的. 若在合约的条件中有一个瞬时改变 (如在多阶段期权中一样)，那么间断的情况一定会发生.

158

26. 求不支付红利的永久美式看涨期权的价值.

第 7 章　更复杂的模型

引　言

为了要把基本 Black-Scholes 模型应用到某些奇异期权的定价，我们现在转向更复杂的市场模型.

在 7.1 节中，我们用可料过程代替 (常数) 参数来刻划基本 Black-Scholes 模型. 在适当的边界假设下，我们重复第 5 章的分析，获得期权的公平价格. 在鞅测度下，它是权益的贴现期望值. 一般地，总可以从数值上来估计该期望值. 我们也可以通过 Feynman-Kac 随机表示定理与推广的 Black-Scholes 方程建立联系.

到目前为止，所给出的模型都是假设市场是由单个股票和无风险债券组成. 更复杂的股权产品可能依赖于几个独立证券的行为. 一般地，这些证券的价格不会独立地演化. 在 7.2 节，我们推广第 4 章中的某些基本结果使我们能够处理由相关的布朗运动建立起来的随机微分方程. 对由多个资产组成的市场，在“参照资产”或“计价单位”的选择中，我们有更多的自由. 因此再用“双重货币工具”产品定价说明“多因子”理论的应用之前，我们再回到这个话题.

对几何布朗运动模型，我们仍没有令人满意的论证. 的确，有大量的证据表明不能获得股票价格演化的所有特性. 第一个证据就是股票价格在无法预料的时间突然发生“跳跃”. 在 7.3 节，我们引入带跳的泊松过程到 Black-Scholes 模型并研究期权定价的含义. 在信用风险分析中，这种方法是普遍的. 在 1.5 节中我们看到，如果模型是不受套利和完全性的影响，那么在随机源的数量和独立股票数之间必定存在一种平衡. 我们在这里重述这一点. 在 7.4 节，我们看到更多的证据表明 Black-Scholes 模型并不反映市场的真实行为. 在将来去责备到目前为止已经成为我们一切工作中心的模型看上去于事无补，因此我们需要弄清如果使用不适当的模型，后果会有多么严重. 我们也非常简短地讨论具有随机波动率和更好地反映真实的市场行为潜力的模型.

本章对在金融分析的后继课程中可能要提到的某些主题不打算过多地指

出. 更多的细节可以在参考书目建议的进一步读物中找到.

7.1 一般股票模型

在经典的 Black-Scholes 框架中，假设无风险利率是常数和股票的回报遵循漂移为常数的布朗运动. 本节我们考虑更一般的能应用 Black-Scholes 分析方法的模型，虽然在实际上，即使对于标准期权现在也必须用数值方法计算价格. 我们保留的关键假设是在市场上存在惟一的随机源，即驱动股票价格的布朗运动 (参见 7.3 节).

模型

记 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为生成布朗运动的 σ - 域流，在基本 Black-Scholes 模型中用 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ - 可料过程 $\{r_t\}_{t\geqslant 0}$，$\{\mu_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 0}$ 代替无风险利率 r，漂移 μ 和波动率 σ. 特别地，在 t 时刻前，r_t，μ_t 和 σ_t 依赖于市场的整个历史. 市场模型如下：

一般股票模型： 市场由一个无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和一个具有价格过程为 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 的单风险资产组成，且满足

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t \mathrm{d}t, \quad B_0 = 1,$$
$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}W_t,$$

这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个生成 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的 $\mathbb{P}$ - 布朗 运动，且 $\{r_t\}_{t\geqslant 0}$, $\{\mu_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程.

显然，这两个方程解的形式应为

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right), \tag{7.1}$$

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s\right), \tag{7.2}$$

160

但要使这些表达式有意义，我们需要某些边界条件. 所以，为了确保等式 (7.1) 和 (7.2) 中积分的存在，假设 $\int_0^T |r_t|\mathrm{d}t$，$\int_0^T |\mu_t|\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^T \sigma_t^2\mathrm{d}t$ 都是以 $\mathbb{P}$- 概率 1 有限.

值得注意的是，为了检验这样的模型符合市场，我们必须从无限维空间中选取参数 $\{r_t\}_{t\geqslant 0}$，$\{\mu_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 0}$. 除非限制这些过程的可能形式，否则这就提出实现上的一大障碍. 在 7.4 节，我们检查模型对定价和对冲策略错误说明的效果. 然而，现在我们暂时抛开这些烦恼，对一般类型的市场模型重温 Black-Scholes 模型的分析方法.

我们必须模仿在经典框架内所遵循的复制三步骤. 首先，在贴现股票价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅的情形下，找到一个等价鞅测度 $\mathbb{Q}$.

鞅测度

如上所述，利用 Girsanov 定理找到一个测度 $\mathbb{Q}$，在该测度下，由

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s$$

定义的过程 $\{\tilde{W}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准的布朗运动. 定义为 $\tilde{S}_t = S_t/B_t$ 的贴现股票价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足随机微分方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{S}_t &= (\mu_t - r_t)\tilde{S}_t\mathrm{d}t + \sigma_t\tilde{S}_t\mathrm{d}W_t \\ &= (\mu_t - r_t - \sigma_t\gamma_t)\tilde{S}_t\mathrm{d}t + \sigma_t\tilde{S}_t\mathrm{d}\tilde{W}_t, \end{aligned}$$

因此，选取 $\gamma_t = (\mu_t - r_t)/\sigma_t$. 为了确保 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 鞅，我们给出两个边界条件. 首先，为了应用 Girsanov 定理，令

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T \frac{1}{2}\gamma_t^2\mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$$

其次，$\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 必须为一个 $\mathbb{Q}$- 鞅 (不仅仅是局部鞅)，所以，我们假设第二个 Novikov 条件：

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T \frac{1}{2}\sigma_t^2\mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$$

在这些附加边界条件下，如果测度 $\mathbb{Q}$ 满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t^{(\gamma)} = \exp\left(-\int_0^t \gamma_s\mathrm{d}W_s - \int_0^t \frac{1}{2}\gamma_s^2\mathrm{d}s\right),$$

那么 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅. 于是在复制策略中完成了第一步. 第二步是形成 $(\mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$- 鞅 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$，这里

复制的第二个步骤 161

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

第三步是证明市场是完全的，即任何权益 C_T 都能被复制. 首先，根据鞅表示定理，令

复制权益

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_u \mathrm{d}\tilde{W}_u,$$

假如 σ_t 不为零，则有

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}\tilde{S}_s,$$

这里 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料的.

在前面讨论的基础上，我们猜想复制投资组合应该由 t 时刻 ϕ_t 份额的股

票和 $\psi_t = M_t - \phi_t S_t$ 份额的现金债券组成. 在习题 1 中，证明这样的投资组合是自融资的. 在 t 时刻它的价值是

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t M_t.$$

特别地，在 T 时刻，$V_T = B_T M_T = C_T$，因此，我们获得一个自融资的复制投资组合. 通常的套利论证告诉我们在 t 时刻权益的公平价值是 V_t，即在 t 时刻期权的套利价格是

$$V_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} C_T \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u} C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

推广的 Black-Scholes 方程

一般地，这样的期望必须用数值方法计算. 如果 r_t，μ_t 和 σ_t 仅仅依赖于 (t, S_t)，那么一种方法就是用推广的 Black-Scholes 偏微分方程的解来表示价格. 这一点可以通过 Feynman- Kac 随机表示定理达到. 特别地，利用例 4.8.6，$V_t = F(t, S_t)$，这里 $F(t,x)$ 为

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + r(t,x)x\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) - r(t,x)F(t,x) = 0.$$

满足对应于权益 C_T 的终值条件的解，至少要求

$$\int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\sigma(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right)^2\right]\mathrm{d}s < \infty.$$

对标准期权，在 r，μ 和 σ 分别为 t 的函数的特殊情况下，可以明确地求出偏微分方程的显式解. 正如在习题 3 中那样，求解过程同解一般 Black-Scholes 方程的过程完全一样. 通过下面简单规则从经典的 Black-Scholes 定价公式就能求出期权的价格：在 t 时刻，对期权的价值分别用

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)\mathrm{d}s \quad 和 \quad \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s$$

162

代替 r 和 σ^2.

7.2 多股票模型

到目前为止，我们总是假设市场由无风险现金债券和单“风险”资产组成. 然而，对期权的整个投资组合或更复杂的股权产品建立模型的需求引导我们寻找能同时描述几种证券的模型. 这样的模型必须表达不同证券价格之间的相互依赖.

假设我们将模型推广到 n 个风险资产，而依旧是单个无风险现金债券. 进一步假设通过完全由其他资产组成的投资组合来精确地复制其中的某个资产是不可能的. 在经典 Black-Scholes 模型的最自然的推广中，单独考虑的每个风险资产价格遵循几何布朗运动相关性，通过取相应的布朗运动是相关的来获得不同资产价格的相关性. 等价地，也可取 n 个独立的布朗运动，通过它们的线性组合获得资产价格 (见习题 2). 于是我们有下列市场模型.

相关证券价格

多资产模型：市场由一现金债券 $\{B_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 和价格为 $\{S_t^1, S_t^2, \cdots, S_t^n\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的 n 个不同的证券组成，它满足随机微分方程组

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}S_t^i = S_t^i\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j + \mu_i(t)\mathrm{d}t\Big), \qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{7.3}$$

这里 $\{W_t^j\}_{t\geqslant 0}, j=1,\cdots,n$ 是互相独立的布朗运动. 假设矩阵 $\sigma=(\sigma_{ij})$ 是可逆的.

注释

1. 这个模型由于存在 n 个随机源而称为 n- 因子模型. 如果存在比股票更少的随机源，那么，正像通过由其他的资产组成的投资组合能复制其中某个股票一样，在模型中存在多余的股票. 另一方面，如果在市场上，我们能对冲任何权益，那么，粗略地说，像随机源一样，我们需要许多“独立的”股票. 这一点反映在命题 1.6.5 中.

2. 注意在该模型中每个股票的波动率实际上是一个向量. 因为布朗运动 $\{W_t^j\}_{t\geqslant 0}, j=1,\cdots,n$ 是独立的，过程 $\{S_t^j\}_{t\geqslant 0}$ 总的波动率是

163

$$\left\{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2(t)}\right\}_{t\geqslant 0} \qquad \square$$

当然，我们不去检验该模型的真实意义. 即我们需要知道随机微分方程组 (7.3) 的解. 为了证实这一点以及分析这样的多因子市场模型，我们需要将第 4 章中的关键结果推广到多维情形.

多因子伊藤公式

最基本的工具是伊藤公式的 n- 因子情形. 如同在单因子伊藤公式中同样的方法，找出由布朗运动函数构成的模型的表达式 (用随机微分方程形式)，这里我们将从老的模型中建立新的多因子模型. 我们的基本组件将是形式为

$$\mathrm{d}X_t^i = \mu_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j, \qquad i=1,\cdots,n, \tag{7.4}$$

的随机微分方程组的解. 这里 $\{W_t^j\}_{t\geqslant 0}, j=1,\cdots,n$, 是独立的布朗运动. 记 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为由 $\{W_t^j\}_{t\geqslant 0}, j=1,\cdots,n$, 生成的 σ- 代数. 假如 $\{\mu_i(t)\}_{t\geqslant 0}$

和 $\{\sigma_{ij}(t)\}_{t\geqslant 0}, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n$, 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ - 可料过程，且

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\left(\sum_{j=1}^n\left(\sigma_{ij}(s)\right)^2+|\mu_i(s)|\right)\mathrm{d}s\right]<\infty,\quad t>0,\ i=1,\cdots,n,$$

那么，我们在第 4 章的结果将给出方程组 (7.4)(的积分形式) 的严格定义.

用 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示过程 $\{X_t^1,X_t^2,\cdots,X_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 向量和定义一个新的随机过程 $Z_t=f(t,X_t)$. 这里，假设 $f(t,X):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是充分光滑的，使我们能应用泰勒定理，如同在 4.3 节中那样，求出关于 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 的随机微分方程. 记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，可得

$$\mathrm{d}Z_t=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\mathrm{d}X_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)\mathrm{d}X_t^i\mathrm{d}X_t^j+\cdots. \tag{7.5}$$

因为布朗运动 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的，所以我们有乘法表

$\times$	$\mathrm{d}W_t^i$	$\mathrm{d}W_t^j$	$\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}W_t^i$	$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}W_t^j$	0	$\mathrm{d}t$	0
$\mathrm{d}t$	0	0	0

当$i\neq j$时 (7.6)

164

并由此得到 $\mathrm{d}X_t^i\mathrm{d}X_t^j=\sum_{k=1}^n\sigma_{ik}\sigma_{jk}\mathrm{d}t$. 同样的乘法表告诉我们 $\mathrm{d}X_t^i\mathrm{d}X_t^j\mathrm{d}X_t^k$ 是 $o(\mathrm{d}t)$. 因此代入到方程 (7.5) 中，我们已经获得了下面结论的启发式论证.

定理7.2.1(多因子伊藤公式) 设 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}=\{X_t^1,X_t^2,\cdots,X_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 满足

$$\mathrm{d}X_t^i=\mu_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^n\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这里 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 是独立的 $\mathbb{P}$ - 布朗运动. 进一步假设在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f(t,x)$ 关于 t 是连续可微的和关于变量 x 是二次连续可微的. 定义 $Z_t=f(t,X_t)$，则有

$$\mathrm{d}Z_t=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\mathrm{d}X_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)C_{ij}(t)\mathrm{d}t$$

这里 $C_{ij}(t)=\sum_{k=1}^n\sigma_{ik}(t)\sigma_{jk}(t)$.

注释 注意如果我们用 σ 表示矩阵 (σ_{ij})，那么 $C_{ij}=(\sigma\sigma^t)_{ij}$，这里 σ^t 表示 σ 的转置.

现在我们可以验证方程组 (7.3) 的解存在. □

例7.2.2(多资产模型) 设 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 是独立的布朗运动. 定义 $\{S_t^1, S_t^2,\cdots,S_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 为

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\int_0^t \left(\mu_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(s)\mathrm{d}W_s^j\right);$$

那么 $\{S_t^1, S_t^2,\cdots,S_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 是方程组 (7.3) 的解.

证 对 $i=1,2,\cdots,n$，定义过程 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 满足

$$\mathrm{d}X_t^i = \left(\mu_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^2(t)\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j.$$

可看到 $S_t^i = f^i(t, X_t)$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n), f^i(t,x) \triangleq S_0^i \mathrm{e}^{x_i}$. 利用定理 7.2.1，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_t^i &= S_0^i \exp(X_t^i)\mathrm{d}X_t^i + \frac{1}{2}S_0^i \exp(X_t^i)C_{ii}(t)\mathrm{d}t \\ &= S_t^i\left\{\left(\mu_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^2(t)\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(t)\sigma_{ik}(t)\mathrm{d}t\right\} \\ &= S_t^i\left\{\mu_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j\right\}\end{aligned}$$

证毕. □

165

注释 就像在单因子模型中那样，虽然可以写出任何复杂的随机微分方程组，但也往往难以保证解的存在性和惟一性. 如果系数是有界的且一致利普希茨连续的，那么解的惟一性存在，但这样的结果超出了我们这里讨论的范围. 如果读者想要进一步了解，可以再次参见 Chung & Williams (1990) 或 Ikeda & Watanabe (1989). □

利用乘法表 (7.6)，可以写出分部积分公式的 n- 因子形式.

分部积分

引理7.2.3 如果

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, X_t)\mathrm{d}W_t^i$$

和

$$\mathrm{d}Y_t = \nu(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \rho_i(t, Y_t)\mathrm{d}W_t^i,$$

那么

$$\mathrm{d}(X_t, Y_t) = X_t\mathrm{d}Y_t + Y_t\mathrm{d}X_t + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, X_t)\rho_i(t, Y_t)\mathrm{d}t.$$

测度变换

在多股票模型中，定价和对冲遵循常见的模式. 首先，要找到一个等价概率测度，在这个测度下，所有贴现的股票价格 $\{\tilde{S}_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$ 是鞅，这里 $\tilde{S}_t^i = \mathrm{e}^{-rt}S_t^i$. 接着，利用多因子的鞅表示定理来构造一个复制投资组合.

当然，鞅测度的建立是要通过多因子 Girsanov 定理.

定理7.2.4 (多因子Girsanov定理) 设在生成 σ - 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的测度 $\mathbb{P}$ 下，$\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 是独立的布朗运动. 令 $\{\theta_i(t)\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程，使得

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^n\theta_i^2(s)\mathrm{d}s\right)\right]\mathrm{d}s<\infty. \tag{7.7}$$

定义

$$L_t=\exp\bigg(-\sum_{i=1}^n\Big(\int_0^T\theta_i(s)\mathrm{d}W_s^i+\frac{1}{2}\int_0^T\theta_i^2(s)\mathrm{d}s\Big)\bigg).$$

166 设满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(L)}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}=L_t$$

的 $\mathbb{P}^{(L)}$ 为概率测度. 那么，在 $\mathbb{P}^{(L)}$ 下，满足

$$X_t^i=W_t^i+\int_0^t\theta_i(s)\mathrm{d}s$$

的过程 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,2,\cdots,n$, 都是鞅.

证明梗概 证明方法仿照单因子情形. 为了方便，记 $L_t=\prod_{i=1}^n L_t^i$，这里

$$L_t^i=\exp\bigg(-\int_0^t\theta_i(s)\mathrm{d}W_s^i-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_i^2(s)\mathrm{d}s\bigg).$$

由 (7.7) 式和布朗运动 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,2,\cdots,n$, 的独立性可知，$\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 定义一个鞅.

为了验证 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 (局部)$\mathbb{P}^L$ - 鞅，寻求 $\{X_t^iL_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足的随机微分方程. 因为

$$\mathrm{d}L_t^i=-\theta_i(t)L_t^i\mathrm{d}W_t^i,$$

反复利用乘积法则，则有

$$\mathrm{d}L_t=-L_t\sum_{i=1}^n\theta_i(t)\mathrm{d}W_t^i.$$

而且，

$$\mathrm{d}X_t^i=\mathrm{d}W_t^i+\theta_i(t)\mathrm{d}t,$$

再次应用乘积法则，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(X_t^i L_t) &= X_t^i \mathrm{d}L_t + L_t \mathrm{d}W_t^i + L_t\theta_i(t)\mathrm{d}t - L_t\theta_i(t)\mathrm{d}t \\ &= -X_t^i L_t \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t)\mathrm{d}W_t^i + L_t \mathrm{d}W_t^i.\end{aligned}$$

结合边界条件 (7.7)，便证明了 $\{X_t^i L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅，从而 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}^{(L)}$ - 鞅. 由于 $\mathbb{P}^{(L)}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价，因此 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 以 $\mathbb{P}^{(L)}$- 概率 1 有平方变差 $[X^i]_t = t$. 再次应用布朗运动的莱维特征，证明 $\{X_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}^{(L)}$ - 布朗运动. 证毕. □

作为约定，在贴现股票价格过程 $\{\tilde{S}_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 都是鞅的情形下，利用这个定理找到一个与 $\mathbb{P}$ 等价的测度 $\mathbb{Q}$. 测度 $\mathbb{Q}$ 为定理 7.2.4 中的测度 $\mathbb{P}^{(L)}$ 之一. 现在需要确定恰当的漂移 $\{\theta_i\}_{t\geqslant 0}$.

鞅测度

贴现的股票价格 $\{\tilde{S}_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 定义为 $\tilde{S}_t^i = B_t^{-1} S_t^i$，且满足随机微分方程

167

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{S}_t^i &= \tilde{S}_t^i(\mu_i(t) - r)\mathrm{d}t + \tilde{S}_t^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j \\ &= \tilde{S}_t^i\Big(\mu_i(t) - r - \sum_{j=1}^{n} \theta_j(t)\sigma_{ij}(t)\Big)\mathrm{d}t + \tilde{S}_t^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}X_t^j,\end{aligned}$$

类似于定理 7.2.4，这里

$$\mathrm{d}X_t^j = \theta_j(t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t^j.$$

如果能使所有漂移项为零，那么贴现的股票价格过程在测度 $\mathbb{Q} = \mathbb{P}^{(L)}$ 下，(同时) 是 (局部) 鞅. 即如果能找到 $\{\theta_j(t)\}_{t\geqslant 0}$, $j = 1,\cdots,n$, 使得

$$\mu_i(t) - r - \sum_{j=1}^{n} \theta_j(t)\sigma_{ij}(t) = 0, \quad \forall\, i = 1,\cdots,n.$$

在记号中略去 t，并令

$$\mu = (\mu_1,\cdots,\mu_n),\ \ \theta = (\theta_1,\cdots,\theta_n),\ \ \mathbf{1} = (1,\cdots,1) \text{ 和 } \sigma = (\sigma_{ij}),$$

则上式成为

$$\mu - r\mathbf{1} = \theta\sigma. \tag{7.8}$$

若矩阵 σ 是可逆的，即保持建立多资产模型时的假设，则解必定存在.

为了保证贴现的股票价格过程是鞅，而不是局部鞅，我们再次加上 Novikov 条件：

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^t \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2(t)\mathrm{d}t\right)\right] < \infty, \quad \text{对每个 } i.$$

复制权益

根据这个条件，我们能准确地猜测到在 $t < T$ 时刻，权益的价值 $C_T \in \mathcal{F}_T$ 在测度 $\mathbb{Q}$ 下是它的贴现期望值. 为了证明这一点，证明存在自融资复制投资组合，而我们从鞅表示定理的多因子形式推导出这个结果.

定理7.2.5(多因子鞅表示定理) 设

$$\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i = 1, \cdots, n,$$

为生成 σ- 域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的独立 $\mathbb{P}$ - 布朗运动. 令 $\{M_t^1, \cdots, M_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 满足

$$\mathrm{d}M_t^i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j,$$

这里

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)^2 \mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$$

进一步假设波动率矩阵 $(\sigma_{ij}(t))$ 是 (以概率 1) 非奇异的. 如果 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是任意一维 $(\mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ - 鞅，那么存在一个 n- 维 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程

$$\{\phi_t\}_{t\geqslant 0} = \{\phi_t^1, \cdots, \phi_t^n\}_{t\geqslant 0},$$

168

使得

$$N_t = N_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \phi_s^j M_s^j.$$

这里该结果的证明超出了我们的范围，可参见 Protter(1990). 注意矩阵 σ 的非奇异性反映在定理 4.6.2 的证明后面关于非零平方变差的注释中.

现在我们能证明猜测的正确性：在多因子情形下，权益价值在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下是它的贴现期望值.

令 $C_T \in \mathcal{F}_T$ 为 T 时刻的权益且令 $\mathbb{Q}$ 为前面获得的鞅测度. 记

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}C_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

因为根据假设条件，矩阵 $\sigma = (\sigma_{ij})$ 是可逆的，由 n- 因子鞅表示定理可知，存在一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程 $\{\phi_t^1, \cdots, \phi_t^n\}_{t\geqslant 0}$，使得

$$M_t = M_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \phi_s^j \mathrm{d}\tilde{S}_s^j.$$

我们的对冲策略是对每个 $i = 1, \cdots, n$, 在 t 时刻持有 ϕ_t^i 份额的第 i 种股票和 ψ_t 份额的债券，这里

$$\psi_t = M_t - \sum_{j=1}^n \phi_t^j \mathrm{d}\tilde{S}_t^j.$$

于是，投资组合的价值是 $V_t = B_t M_t$，它在 T 时刻就是权益的价值. 并且，在

$$\mathrm{d}V_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_t^j \mathrm{d}S_t^j + \psi_t \mathrm{d}B_t$$

情形下，投资组合是自融资的. 因此，在无套利情形下，t 时刻的衍生产品的价值为

$$V_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} C_T \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[C_T \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

这正是预期的结果.

注释 已经建立的多因子市场是完全的和无套利的. 通过假设市场上噪声源数与正用于建立模型的可交易风险资产数相匹配，我们已经简化了说明. 更一般地，我们能建立关于与 d 个噪声源相匹配的 k 个风险资产的模型. 鞅测度的存在性与 (7.8) 解的存在性是一致的. 正是因为鞅测度的惟一性，给出了鞅表示定理，因此能复制任何权益. 对一个完全的无套利市场，需要 $d \leqslant k$ 和 σ 是满 秩矩阵. 即独立随机源数应与市场上交易的“独立”风险资产数相匹配. 169 □

多维 Black-Scholes 方程

在习题 7 中，利用 Δ- 对冲论证获得的这个价格就是多维 Black-Scholes 方程的解. 直接由期望价格和多维 Feynman-Kac 随机表示定理可得到这个偏微分方程. 这里把这个有用结果的相应形式表述如下.

定理7.2.6(多维Feynman-Kac随机表示定理) 设 $\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))$ 是一个实对称 $n \times n$ 矩阵，$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $\mu_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n$, 是实值函数且 r 为常数. 假定对 $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$，函数 $F(t,x)$ 是边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x) \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(t,x) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}(t,x) \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) - rF(t,x) = 0, \\ F(T,x) = \Phi(x), \end{cases}$$

的解，这里 $C_{ij}(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)$.

进一步假设，对每个 $i = 1, \cdots, n$, 过程 $\{X_t^i\}_{t \geqslant 0}$ 是随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t^i = \mu_i(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t, X_t)\mathrm{d}W_t^j$$

的解，这里 $X_t = \{X_t^1, \cdots, X_t^n\}$. 最后，假设

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sigma_{ij}(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s)\right)^2\right] \mathrm{d}s < \infty, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

那么

$$F(t,x) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\Phi(X_T) | X_t = x].$$

推论7.2.7 设 $S_t=\{S_t^1,\cdots,S_t^n\}$ 如上所述，$C_T=\Phi(S_T)$ 为 T 时刻的权益. 那么在 $t<T$ 时刻，权益的价格

$$V_t=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t]=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)|S_t=x]\triangleq F(t,x)$$

满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}(t,x)x_ix_j\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(t,x)+r\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(t,x)-rF(t,x)=0,\\ F(T,x)=\Phi(x).\end{cases}$$

证 过程 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足

$$\mathrm{d}S_t^i=rS_t^i\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,S_t)S_t^j\mathrm{d}X_t^j,$$

170 这里 $\{X_t^j\}_{t\geqslant 0},j=1,\cdots,n$, 是 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动，因此利用定理 7.2.6 可知结果成立. □

计价单位

在市场中，资产越多，选择“计价单位”或“参照资产”越自由. 通常选择现金债券，但事实上，也可能选择任何可交易的有用资产. 在外汇市场，可用两种货币中的任何一种作为无风险债券参照，并且总可以获得相同的权益价值. 这里考虑同一个市场中的两个计价单位，但存在非零的波动率.

假设市场由 $n+2$ 个可交易资产组成，其价格用 $\{B_t^1,B_t^2,S_t^1,\cdots,S_t^n\}_{t\geqslant 0}$ 表示. 比较由两个交易者获得的衍生产品的价格，其中之一是选取 $\{B_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 为计价单位，另一个选取 $\{B_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 为计价单位. 总假设价格的演化遵循多维几何布朗运动模型，但两个过程 $\{B_t^i\}_{t\geqslant 0}$ 都不必存在有限变差.

如果选取 $\{B_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 作为计价单位，那么在由 $\{B_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 贴现的资产价格情形下首先找到一个等价测度 $\mathbb{Q}^1$，即

$$\left\{\frac{B_t^2}{B_t^1},\frac{S_t^1}{B_t^1},\cdots,\frac{S_t^n}{B_t^1}\right\}_{t\geqslant 0}$$

都是 $\mathbb{Q}^1$ - 鞅. 那么可得 T 时刻收益为 C_T 的衍生产品的价值为

$$V_t^1=B_t^1\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\frac{C_T}{B_T^1}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

(见习题 7).

如果选取 $\{B_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 作为计价单位，那么衍生产品的价格为

$$V_t^2=B_t^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^2}\left[\frac{C_T}{B_T^2}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

这里在

$$\left\{\frac{B_t^1}{B_t^2}, \frac{S_t^1}{B_t^2}, \cdots, \frac{S_t^n}{B_t^2}\right\}_{t\geqslant 0}$$

都是鞅的情形下，$\mathbb{Q}^2$ 是一个等价概率测度. 并没有证明这样的测度 $\mathbb{Q}^2$ 是惟一的，但如果能复制权益，则对具有这个性质的任何测度 $\mathbb{Q}^2$，可得到同样的价格.

假设选取 $\mathbb{Q}^2$ 使得它关于 $\mathbb{Q}^1$ 的 Radon-Nikodym 导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^2}{\mathrm{d}\mathbb{Q}^1}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t^2}{B_t^1}.$$

注意到由于对选取 $\{B_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 为计价单位的投资者，$\mathbb{Q}^1$ 是鞅测度，由此可知 $\{B_t^2/B_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}^1$ - 鞅. 回顾如果

171

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \zeta_t, \quad \forall t > 0,$$

那么，对 $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\zeta_t}{\zeta_s}X_t\middle|\mathcal{F}_s\right].$$

首先利用这个结论, 对每个 $i = 1, \cdots, n$, 验证 $\{S_t^i/B_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}^2$ - 鞅.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^2}\left[\frac{S_t^i}{B_t^2}\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\frac{B_t^2}{B_t^1}\frac{B_s^1}{B_s^2}\frac{S_t^i}{B_t^2}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\frac{B_s^1}{B_s^2}\frac{S_t^i}{B_t^1}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{B_s^1}{B_s^2}\frac{S_s^i}{B_s^1} = \frac{S_s^i}{B_s^2},
\end{aligned}$$

这里因为 B_s^1 和 B_s^2 是 $\mathcal{F}_s$- 可测的并且 $\{S_t^i/B_t^1\}_{t\geqslant 0}$，是一个 $\mathbb{Q}^1$ - 鞅，所以上式最后一行成立. 换句话说，$\{S_t^i/B_t^2\}_{t\geqslant 0}$，如所要求的那样，是一个 $\mathbb{Q}^2$ - 鞅. 同样可知 $\{B_t^1/B_t^2\}_{t\geqslant 0}$，是一个 $\mathbb{Q}^2$ - 鞅.

如果选取 $\{B_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 为计价单位，那么衍生产品的价格为

$$\begin{aligned}
V_t^2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^2}\left[\frac{B_t^2}{B_T^2}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\frac{B_T^2}{B_T^1}\frac{B_t^1}{B_t^2}\frac{B_t^2}{B_T^2}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\frac{B_t^1}{B_T^1}C_T\middle|\mathcal{F}_t\right] = V_t^1.
\end{aligned}$$

换句话说，计价单位的选择是不重要的，即我们总可以获得相同的价格.

双重货币工具

现在我们在一个例子中应用多因子技巧，对双重货币远期合约 (quanto forward contract) 进行定价.

定义7.2.8 一个金融资产称为双重货币工具，如果它是以另一种货币作为清算的衍生证券.

双重货币远期合约也称为担保汇率远期合约 (guaranteed exchange rate forward). 通过一个例子最容易解释双重货币远期合约.

例7.2.9 BP 是一家英国公司，它有以英镑进行清算的股票价格 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$. 对美元投资者来说，关于到期日为 T 的 BP 股票，双重货币远期合约就是按照某个事先规定的汇率，将收益 (S_T-K) 转换为美元. 即对某个事先约定的 E，收益为 $E(S_T-K)$ 美元，这里 S_T 为 T 时刻时的英镑资产价格.

172

正像在 5.3 节中的外汇市场那样，假设在美元和英镑市场都存在无风险现金债券，但现在我们的模型中有两个随机过程， 一个是股票价格 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，另一个是汇率. 1 英镑的美元价值记为 $\{E_t\}_{t\geqslant 0}$，因此，存在一个两因子 (two-factor) 模型.

Black-Scholes双重货币工具模型: 记 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{D_t\}_{t\geqslant 0}$ 分别为美元和英镑现金债券. 记 E_t 为 t 时刻 1 英镑的美元价值和 S_t 为 t 时刻的英镑资产价格，则模型为

$$\begin{aligned} \text{美元债券}\quad & B_t = \mathrm{e}^{rt}, \\ \text{英镑债券}\quad & D_t = \mathrm{e}^{ut}, \\ \text{英镑资产价格}\quad & S_t = S_0\exp(\nu t + \sigma_1 W_t^1), \\ \text{汇率}\quad & E_t = E_0\exp\left(\lambda t + \rho\sigma_2 W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 W_t^2\right), \end{aligned}$$

这里 $\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的 $\mathbb{P}$ - 布朗运动，$r,u,\nu,\lambda,\sigma_1,\sigma_2$ 和 ρ 均为常数.

在该模型中，$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{E_t\}_{t\geqslant 0}$ 的波动率分别为 σ_1 和 σ_2，$\{W_t^1, \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是一对相关系数为 ρ 的相关布朗运动. 对独立的布朗运动 $\{\tilde{W}_t^1, \tilde{W}_t^2\}_{t\geqslant 0}$，$S_t$ 和 E_t 的表达式为

$$S_t = S_0\exp(\nu t + \sigma_{11}\tilde{W}_t^1 + \sigma_{12}\tilde{W}_t^2),$$

$$E_t = E_0\exp(\lambda t + \sigma_{21}\tilde{W}_t^1 + \sigma_{22}\tilde{W}_t^2).$$

而不存在其他的一般表达式.

双重货币远期合约定价

使双重货币远期合约在零时刻的价值为零的 K 的价值是多少?

正如在外汇市场的讨论中那样，第一步是根据美元可交易资产重述所讨论的问题. 现在有三个美元可交易资产：英镑债券的美元价值 E_tD_t；

股票的美元价值 E_tS_t 和美元现金债券 B_t. 选取美元现金债券作为计价单位. 我们首先求出其他两个美元可交易资产的贴现价格满足的随机微分方程. 记 $Y_t = B_t^{-1}E_tD_t$ 和 $Z_t = B_t^{-1}E_tS_t$. 因为

$$\mathrm{d}E_t = \left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)E_t\mathrm{d}t + \rho\sigma_2 E_t\mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 E_t\mathrm{d}W_t^2,$$

利用多因子分部积分公式，得

$$\mathrm{d}(E_tD_t) = uE_tD_t\mathrm{d}t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)E_tD_t\mathrm{d}t + \rho\sigma_2 E_tD_t\mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 E_tD_t\mathrm{d}W_t^2$$

和

173

$$\mathrm{d}Y_t = \left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r\right)Y_t\mathrm{d}t + Y_t\left(\rho\sigma_2\mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\mathrm{d}W_t^2\right).$$

类似地，因为

$$\mathrm{d}S_t = \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)S_t\mathrm{d}t + \sigma_1 S_t\mathrm{d}W_t^1,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(E_tS_t) &= \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)E_tS_t\mathrm{d}t + \sigma_1 E_tS_t\mathrm{d}W_t^1 \\ &\quad + \left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)S_tE_t\mathrm{d}t + \rho\sigma_2 S_tE_t\mathrm{d}W_t^1 \\ &\quad + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 S_tE_t\mathrm{d}W_t^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 S_tE_t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_t &= \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - r\right)Z_t\mathrm{d}t \\ &\quad + (\sigma_1 + \rho\sigma_2)Z_t\mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 Z_t\mathrm{d}W_t^2.\end{aligned}$$

现在我们寻求测度变换使这两个过程为鞅过程. 由定理 7.2.4 的证明后面的算式，化简上式可知，θ_1, θ_2 满足

$$\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r - \theta_1\rho\sigma_2 - \theta_2\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 = 0$$

和

$$\nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - r - \theta_1(\sigma_1 + \rho\sigma_2) - \theta_2\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 = 0.$$

解这两个联立方程，得

$$\theta_1 = \frac{\nu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - u}{\sigma_1}$$

和

$$\theta_2 = \frac{\lambda + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r - \rho\sigma_2\theta_1}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}.$$

在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，由 $X_t^1 = W_t^1 + \theta_1 t$ 和 $X_t^2 = W_t^2 + \theta_2 t$ 定义的 $\{X_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{X_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的布朗运动. 于是，我们得到

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(u - \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 X_t^1\right).$$

特别地，

$$S_T = \exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T) S_0 \mathrm{e}^{uT} \exp\left(\sigma_1 X_T^1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T\right).$$

174 最后，我们就可以在双重货币合约中定价远期合约. 因为 $\{X_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\sigma_1 X_T^1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T\right)\right] = 1,$$

因此，

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathrm{e}^{-rT} E\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)] \\ &= \mathrm{e}^{-rT} E\Big(\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T) S_0 \mathrm{e}^{uT} - K\Big). \end{aligned}$$

记 $F = S_0\mathrm{e}^{uT}$ 为英镑市场中的远期价格且令 $V_0 = 0$，那么易知应取

$$K = F\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T).$$

注释　汇率为

$$E_t = E_0 \exp\left(\left(r - u - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \rho\sigma_2 X_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 X_t^2\right).$$

不难看到 $\rho X_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} X_t^2$ 是一个方差为 1 的 $\mathbb{Q}$ - 布朗运动. 因此 $\{E_t\}_{t\geqslant 0}$ 的这个表达式就是在 5.3 节中获得的表达式. 同时，注意贴现股票价格过程 $\mathrm{e}^{-rt}S_t$ 不是一个鞅；存在一额外项，反映了英镑价格不是一种美元可交易资产的事实. □

7.3　带跳的资产定价模型

Black-Scholes 框架有很强的灵活性. 关键的假设条件是交易过程是连续的且资产价格的动态特性是连续的. 的确，假设满足第二个条件，那么在离散交易的情况下，当交易时间区间趋于零时，Black-Scholes 价格恰好是套利价格

的渐近逼近. 但资产价格是连续的吗?

到目前为止，我们总假设任何签定的合约将到期履约. 特别地，如果政府或公司发行一种债券，我们无须考虑合约到期违约的可能性. 但违约确实会发生. 在近年，亚洲、拉丁美洲和俄罗斯爆发的信贷危机戏剧性地说明了这一点. 如果 A 公司持有相当多数量的 B 公司的债务证券，那么 B 公司违约将会造成 A 公司股票价格突然下跌的间接影响. 怎样将这些市场"震荡"反映在模型中呢?

带跳的泊松过程

根据它们的特性，违约是不可预测的. 如果假设完全没有帮助我们预测违约时间或其他市场震荡的信息，那么应该根据泊松随机变量来建立模型，即震荡间隔时间服从指数分布，而到 t 时刻为止的震荡次数 N_t 是一个参数为 λt 的泊松随机变量，λ 是某个大于 0 的数. 假设震荡之间的资产价格遵循熟知的几何布朗运动模型.

一个典型的带跳风险资产价格演化的模型是

175

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t-\delta\mathrm{d}N_t, \tag{7.9}$$

这里 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的. 为了理解方程 (7.9) 的意义，写出它的积分形式，但这样必须定义关于 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 的随机积分. 记 τ_i 为泊松过程第 i 次跳的时间，定义

$$\int_0^t f(u,S_u)\mathrm{d}N_u=\sum_{i=1}^{N_t} f(\tau(i)-,S_{\tau(i)-}).$$

对模型 (7.9)，若存在一个震荡，那么资产价格将以 $(1-\delta)$ 因子减少. 这个事实告诉我们方程 (7.9) 的解是

$$S_t=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right)(1-\delta)^{N_t}.$$

为了研究更一般的模型，必须将随机分析理论推广到带跳的混合过程. 通常第一步是求出 (推广的) 伊藤公式.

假设条件:假设资产价格过程是右连左极，即是具有左极限的右连续.

定理7.3.1 (带跳的伊藤公式) 假设

$$\mathrm{d}Y_t=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}W_t+\nu_t\mathrm{d}N_t,$$

这里，在 $\mathbb{P}$ 下 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准布朗运动和 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个强度为 λ

的泊松过程. 如果 f 是 $\mathbb{R}$ 上一个二次连续可微函数, 那么

$$
\begin{aligned}
f(Y_t) &= f(Y_0) + \int_0^t f'(Y_{s-})\mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_{s-})\sigma_s^2 \mathrm{d}s \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_t} f'(T_{\tau_i-})\big(Y_{\tau_i} - Y_{\tau_i-}\big) + \sum_{i=1}^{N_t}\big(f(Y_{\tau_i}) - f(Y_{\tau_i-})\big),
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

这里 $\{\tau_i\}$ 是泊松过程的跳的时间.

这里不证明这个定理, 但直观推断不难看到它是正确的结果. 如果过程 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 是连续的, 前面的三项正是所需要的结论. 但现在由于不连续, 必须把 Y_{s-} 与 Y_s 区别开来. 在 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 的跳之间, 确实应该应用该等式, 但对跳时的这种变化必须给予补偿. 在前三项里包括了形式为 $\sum_{i=1}^{N_t} f'(T_{\tau_i-})\big(Y_{\tau_i} - Y_{\tau_i-}\big)$ 的项, 而方程 (7.10) 的第一个和式对此进行了修正. 由于 N_t 是有限的, 不必修正包含 f'' 的项. 在实际中, 考虑到跳的次数我们增加了第二个和式.

176

补偿

通常鞅起到一个关键的作用. 显然, 在 $\mathbb{P}$ 下强度为 λ 的泊松过程 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 不是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅, 即它是单调递增的. 但我们可以把它写成一个鞅加上一个漂移. 习题 13 表明由 $M_t = N_t - \lambda t$ 定义的过程 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅.

更一般地, 考虑时间非齐次泊松过程. 对这样的过程强度 $\{\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$ 是时间的一个函数. 在时间区间 $[t, t+\delta t)$ 跳的概率是 $\lambda_t\delta t + o(\delta t)$. 因此, 在区间 $[s,t]$ 不存在跳的概率为 $\exp\left(-\int_s^t \lambda_u \mathrm{d}u\right)$. 对应的泊松鞅 (Poisson martingale) 是 $M_t = N_t - \int_0^t \lambda s\mathrm{d}s$. 由 $\Lambda_t = \int_0^t \lambda s\mathrm{d}s$ 定义的过程 $\{\Lambda_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 的补偿者 (compensator).

习题 14 中证明了正是关于布朗鞅的积分产生了 (局部) 鞅, 因此, 关于泊松鞅的积分产生鞅.

泊松指数鞅

例7.3.2　设 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是在 $\mathbb{P}$ 下强度为 $\{\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$ 的泊松过程, 且对每个 $t>0$, $\int_0^t \lambda s\mathrm{d}s < \infty$. 对给定的有界确定函数 $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$, 令

$$
L_t = \exp\left(\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}M_s + \int_0^t (1+\alpha_s - \mathrm{e}^{\alpha_s})\lambda_s \mathrm{d}s\right),
\tag{7.11}
$$

这里 $\mathrm{d}M_s = \mathrm{d}N_s - \lambda_s\mathrm{d}s$. 求 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足的随机微分方程并证明 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅.

解　首先, 记

$$
Z_t = \int_0^t \alpha_s \mathrm{d}M_s + \int_0^t (1+\alpha_s - \mathrm{e}^{\alpha_s})\lambda_s \mathrm{d}s
$$

使得 $L_t = \mathrm{e}^{Z_t}$. 于是

$$
\mathrm{d}Z_t = \alpha_t \mathrm{d}N_t - \alpha_t\lambda_t \mathrm{d}t + (1+\alpha_t - \mathrm{e}^{\alpha_t})\lambda_t \mathrm{d}t.
$$

由推广的伊藤公式，得

$$\mathrm{d}L_t = L_{t-}\mathrm{d}Z_t + \Big(-\mathrm{e}^{Z_{t-}}\alpha_t + \mathrm{e}^{Z_{t-}+\alpha_t} - \mathrm{e}^{Z_{t-}}\Big)\mathrm{d}N_t,$$

这里已经用到如果 t 时刻在 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$ 中跳发生，那么跳的大小是 α_{t-} 这个事实. 代入并重新整理得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_t &= L_{t-}\alpha_t\mathrm{d}M_t + L_{t-}(1+\alpha_t-\mathrm{e}^{\alpha_t})\lambda_t\mathrm{d}t - L_{t-}(1+\alpha_t-\mathrm{e}^{\alpha_t})\mathrm{d}N_t\\ &= L_{t-}(\mathrm{e}^{\alpha_t}-1)\mathrm{d}M_t.\end{aligned}$$

根据习题 14，$\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 鞅.

定义7.3.3 由 (7.11) 定义的 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 形式的过程称为泊松指数鞅.

泊松指数鞅和布朗指数鞅都是 Doléans-Dade 指数鞅的例子. 177

定义7.3.4 对 $X_0=0$ 的半鞅 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，它的 Doléans-Dade 指数鞅是满足

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\mathrm{d}X_s.$$

的惟一半鞅 $\{Z_t\}_{t\geqslant 0}$.

用同样的方法，正像用布朗指数鞅来变换测度和因此在连续模型中“转换漂移”那样，我们在不连续资产定价模型中把布朗指数鞅和泊松指数鞅结合起来. 泊松鞅漂移的改变与泊松过程 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 中强度的改变是一致的. 更确切地说，我们有下面形式的 Girsanov 定理.

测度变换

定理7.3.5 (带跳资产价格的Girsanov定理) 设 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个标准 $\mathbb{P}$ - 布朗运动，$\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是在 $\mathbb{P}$ 下强度为 $\{\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$ 的 (可能是时间非齐次) 泊松过程. 即

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u\mathrm{d}u$$

是一个 $\mathbb{P}$- 鞅. 记 $\mathcal{F}_t$ 为由 $\mathcal{F}_t^W \bigcup \mathcal{F}_t^N$ 生成的 σ - 域. 假设 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程，且对每个 t，ϕ_t 为正，使得

$$\int_0^t ||\theta_s||^2\mathrm{d}s < \infty \quad 和 \quad \int_0^t \phi_s\lambda_s\mathrm{d}s < \infty.$$

那么在测度 $\mathbb{Q}$ 下，它关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t,$$

这里 $L_0 = 1$ 且

$$\frac{\mathrm{d}L_t}{L_{t-}} = \theta_t\mathrm{d}W_t - (1-\phi_t)\mathrm{d}M_t,$$

定义为 $X_t = W_t - \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$ 的过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个布朗运动且 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 的强度为 $\{\phi_t\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$.

在习题 16 中将证明 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 实际上是布朗指数鞅和泊松指数鞅的乘积.

定理 7.3.5 的证明超出了本书的范围，但有一个练习利用伊藤公式验证过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\}_{t\geqslant 0}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下都是局部鞅.

178

基本思路 该结论的非正式证明是基于下面推广的乘法表：

$\times$	$\mathrm{d}W_t$	$\mathrm{d}N_t$	$\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}W_t$	$\mathrm{d}t$	0	0
$\mathrm{d}N_t$	0	$\mathrm{d}N_t$	0
$\mathrm{d}t$	0	0	0

因此，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(L_t\left(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\right)\right) &= \left(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}L_t + L_t(\mathrm{d}N_t - \phi_t\lambda_t\mathrm{d}t) \\
&\quad - L_t(1-\phi_t)(\mathrm{d}N_t)^2 \\
&= \left(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}L_t + L_t(\mathrm{d}M_t + \lambda_t\mathrm{d}t) \\
&\quad - L_t\phi_t\lambda_t\mathrm{d}t - L_t(1-\phi_t)(\mathrm{d}M_t + \lambda_t\mathrm{d}t) \\
&= \left(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}L_t + L_t\phi_t\mathrm{d}M_t.
\end{aligned}$$

因为 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{P}$- 鞅，在适当的边界条件假设下，$\{L_t\big(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\big)\}_{t\geqslant 0}$ 必为一个 $\mathbb{P}$- 鞅，故 $\{\big(N_t - \int_0^t \phi_s\lambda_s \mathrm{d}s\big)\}_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{Q}$- 鞅. □

直觉上，就是利用推广的 Girsanov 定理，找到一个等价概率测度，在此测度下，资产的贴现价格是鞅.

假设

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t - \delta\mathrm{d}N_t.$$

显然资产的贴现价格满足

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t - \delta\mathrm{d}N_t.$$

但现在看出在定理 7.3.5 中有产生鞅测度的 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 多种选择. 困难在于市场是不完全的，因此虽然能用任意鞅测度来复制权益和得到同样的结论，但存在不能对冲的权益. 存在两个独立的风险源，即布朗运动和泊松过程. 因此如果能对冲任意权益 $C_T \in \mathcal{F}_T$，那么在相同的两个噪声条件下需要两个可交易的风险资产.

如果有足够多的资产可用于对冲权益，能否找到一个测度，在该测度下使它们的贴现价值都是鞅？记住在相反的情况下，在市场上存在套利机会.

风险的市场价格

如果资产价格不存在跳，可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \\ &= (r+\gamma\sigma)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t,\end{aligned}$$

这里 $\gamma = (\mu - r)/\sigma$ 为风险的市场价格. 第 5 章已经看到在无套利情况下 (因此在市场上存在等价鞅测度)，γ 对由 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 所驱动的所有资产都是相同的.

如果资产价格存在跳，那么投资者期望补偿与下跳有关的附加风险，即使存在“补偿的”跳跃 (用 $\mathrm{d}M_t$ 代替 $\mathrm{d}N_t$) 使得它们的均值为零. 这样的资产价格满足 [179]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t + \nu\mathrm{d}M_t \\ &= (r+\gamma\sigma+\eta\lambda\nu)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t + \nu\mathrm{d}M_t\end{aligned}$$

这里 ν 是资产价格对市场震动的敏感性的测度，η 表示每单位带跳的风险资产的高额回报率. 再次看到，如果存在鞅测度，使得在该测度下所有的贴现资产价格是鞅，那么对由 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 所驱动的价格的所有资产，σ 和 η 是相同的. 从而鞅测度 $\mathbb{Q}$ 就是定理 7.3.5 中的测度，在此测度下，

$$W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}s \quad 和 \quad M_t - \int_0^t \eta\lambda\mathrm{d}s$$

是鞅. 即可取 $\theta = \gamma$ 和 $\phi = -\eta$.

同样的思想能延伸到由大量独立噪声所驱动的资产.例如，存在带动态特性的 n 个资产

多噪声

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} = \mu_i\mathrm{d}t + \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{i\alpha}\mathrm{d}W_t^\alpha + \sum_{\beta=1}^m \nu_{i\beta}\mathrm{d}M_t^\beta$$

这里在 $\mathbb{P}$ 下，$\{W_t^\alpha\}_{t\geqslant 0}, \alpha = 1,\cdots,n$, 是独立布朗运动且 $\{M_t^\beta\}_{t\geqslant 0}, \beta = 1,\cdots,m$, 是独立泊松鞅.

如果能把风险的惟一市场价格与每一个噪声源联系起来，那么存在等价鞅测度，在该测度下，所有的贴现资产价格都是鞅. 在这种情形下，记

$$\mu_i = r + \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha\sigma_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^m \eta_\beta\lambda_\beta\nu_{i\beta}.$$

如果对每个 α

$$\tilde{W}_t^\alpha = W_t^\alpha + \gamma_\alpha t$$

是鞅，对每个 β

$$\tilde{M}_t^{\beta} = M_t^{\beta} + \eta_{\beta}\lambda_{\beta}t$$

是鞅，那么在测度 $\mathbb{Q}$ 下，所有的贴现资产价格都是鞅.

通常正是复制推动了理论的发展. 注意为了能对冲任意权益 $C_T \in \mathcal{F}_T$，我们需要 $n+m$ 个“独立的”由这些噪声源所驱动的可交易风险资产. 在我们的处置中如果资产数目太少，那么将存在不能对冲的权益 C_T.

如果取系数 μ, σ, λ 为适应于由 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$ 所产生的 σ- 域流，那么所有这些将有一点点变化，参见习题 15. 因为我们没有引入任何其他的噪声源，所以对市场的完全性而言，需要相同数量的资产. 这些思想形成了 Jarrow-Madan 理论的基础.

180

7.4 模型误差

甚至在没有跳 (或在两次跳之间) 的情况下，我们对 Samuelson 模型

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t. \tag{7.12}$$

也只是给出了非常模糊的论证. 然而，尽管已经证明在这个模型下由单个参数 σ 能确定衍生产品的定价和对冲，但实际上我们并未讨论根据市场数据来如何估计该参数. 因此市场情况是怎样的呢？

隐含波动率

标准期权一般可在交易所交易，因此如果交易者想知道比如说欧式看涨期权的价格，那么她可从交易屏幕上看到. 然而，对一个场外衍生产品，在交易所不知道其价格，因此需要它的定价模型. 通常的做法是建立一个 Black-Scholes 模型，然后校准 (calibrate) 使它符合市场，即从市场中估计 σ. 但并不常用直接从股票价格数据中估计 σ. 对交易所交易的期权，可用关于同一个股票的收盘价格来代替. 这个方法是简单的：对给定的敲定价格和到期日，可把欧式期权的 Black-Scholes 定价公式看作是从波动率 σ 到期权价格 V 的一个映射. 在习题 17 中，将证明对于标准期权这个映射是严格单调的，因此可反过来从期权价格求出 σ. 换句话说，已知期权价格，就可得到 Black-Scholes 公式中对应的 σ 值. 这个值就是所谓的**隐含波动率** (implied volatility).

如果市场确实满足 Black-Scholes 方程，那么这种方法给出 σ 的相同值，而与交易所交易期权的敲定价格和到期日的选取无关. 不幸的是，这与我们观察到的真实性远不相符：不仅它们对固定到期日依赖于敲定价格，产生著名的波动率微笑，而且隐含波动率随着到期日的临近趋向于增加 (图 7-1). 对于场外期权定价，市场上实际是选择从“可比较的”交易所交易期权中获得的隐含波动率作为波动率参数.

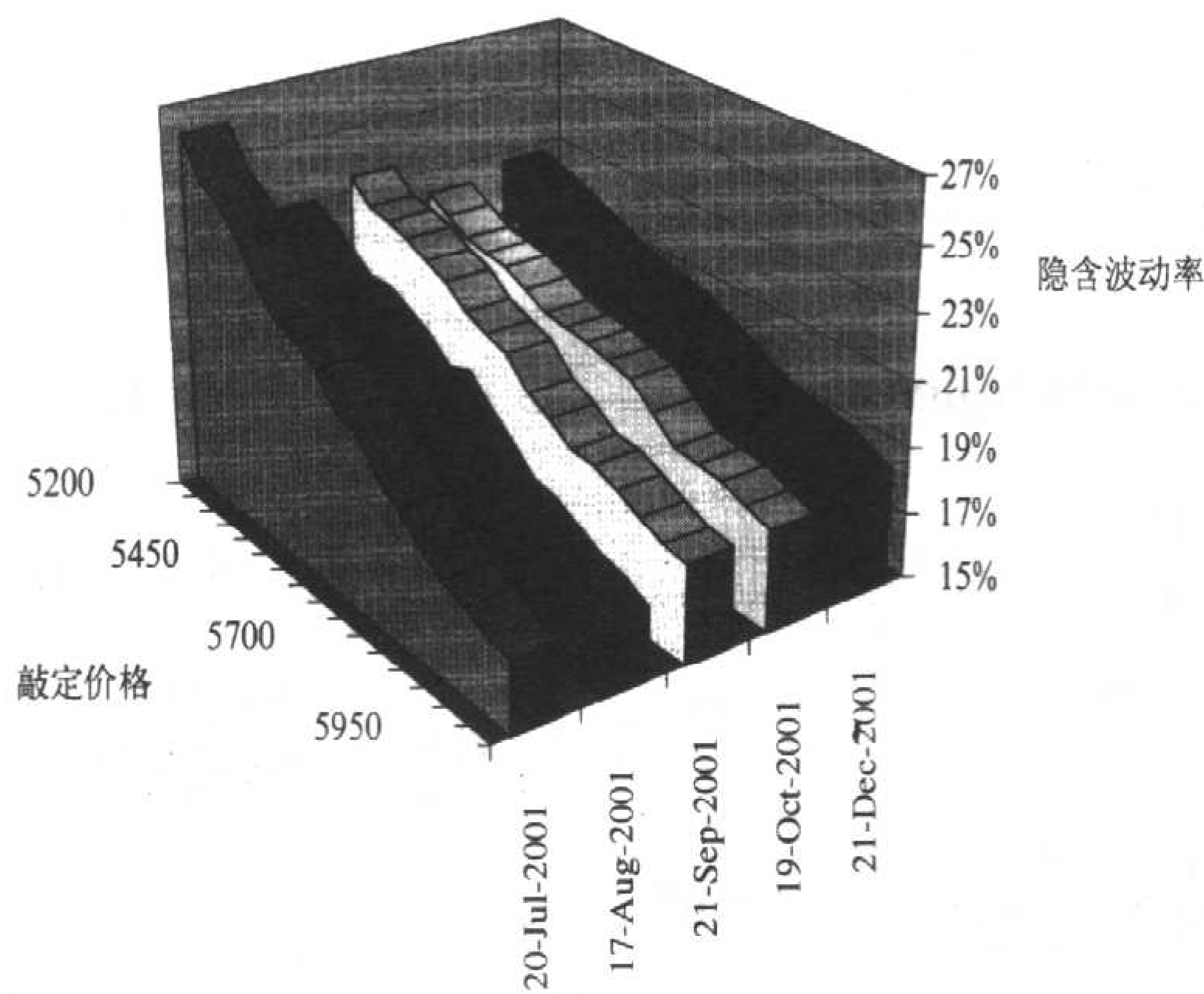


图 7-1: 对基于 FTSE 股票指数的欧式看涨期权隐含波动率是敲定价格和到期日的函数

对冲误差

这种方法希望能导出交易所交易期权和场外期权的一致价格，且使模型误差不是一个严重的问题. 困难是出现在对冲中. 即使对交易所交易期权来说，也需要用模型来确定复制投资组合. 参见 Davis (2001).

假设真实的股票价格过程满足

$$\mathrm{d}S_t = \alpha_t S_t \mathrm{d}S_t + \beta_t S_t \mathrm{d}W_t$$

其中 $\{\alpha_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\beta_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 适应过程，对某个参数 σ 尽管 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足方程 (7.12)，但仍然定价和对冲在 T 时刻收益为 $\Phi(S_T)$ 的期权.

对在 $t < T$ 时刻期权价值的估计是 $V(t, S_t)$，其中 $V(t,x)$ 满足 Black-Scholes 偏微分方程

181

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + rx\dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) - rV(t,x) = 0, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

对冲组合由 t 时刻 $\phi_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)$ 份额股票和总价值为 $\psi_t \mathrm{e}^{rt} \triangleq V(t,S_t) - \phi_t S_t$ 的现金债券所组成.

第一个担心的问题是由于模型不规范，投资组合不是自融资的. 因此按照这样的策略费用是多少？因为在 t 时刻购买“对冲”组合的费用是 $V(t, S_t)$，在无穷小时间区间 $[t, t+\delta t)$ 上策略增加的费用为

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)\big(S_{t+\delta t} - S_t\big) + \left(V(t,S_t) - \frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)S_t\right)(\mathrm{e}^{r\delta t} - 1)$$
$$-V(t+\delta t, S_{t+\delta t}) + V(t, S_t).$$

换句话说，记 Z_t 为 t 时刻网格位置，则有

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)\mathrm{d}S_t + \left(V(t, S_t) - \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)S_t\right)r\mathrm{d}t - \mathrm{d}V(t, S_t).$$

182 因为 $V(t,x)$ 是 Black-Scholes 偏微分方程的解，应用伊藤公式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_t &= \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)\mathrm{d}S_t + \left(V(t, S_t) - \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)S_t\right)r\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t)\mathrm{d}t - \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t)\mathrm{d}S_t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t)\beta_t^2 S_t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\sigma^2 - \beta_t^2)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

不管模型怎样，$V(T, S_T) = \Phi(S_T)$ 与 T 时刻给定的权益完全一致，因此在 T 时刻网格位置 (事先给定了权益 $\Phi(S_T)$) 为

$$Z_T = \int_0^T \frac{1}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t)(\sigma^2 - \beta_t^2)\mathrm{d}t.$$

对欧式看涨和看跌期权，$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$ (见习题 18)，因此如果对所有的 $t \in [0, T]$，$\sigma^2 > \beta_t^2$，那么我们的对冲策略获得了利润. 这意味着不受价格动态的影响，在 Black-Scholes 模型中如果参数 σ 控制真正的扩散系数 β，那么我们获得利润. 这是成功对冲的关键. 尽管通过选取足够大的 σ 仍可使 Z_T 有正的期望，但如果价格过程存在跳，那么将停止计算.

σ 的选取仍是一个棘手的事情. 如果我们过于小心以致于没有人购买期权，过于乐观以致于暴露与波动率变化有关的风险，因此我们应该尝试对冲该风险. 这样的对冲被称为$\mathcal{V}$- 对冲 ($\mathcal{V}$ hedging)，一个期权的希腊字母$\mathcal{V}$表示它的 Black-Scholes 价格对 σ 变化的敏感性. 这个思想与 δ 对冲的思想是相同的 (第 5 章中习题 5). 例如，如果我们购买一份场外期权使得 $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = v$，那么我们也出售数量为 v/v' 的可比较的交易所交易期权，该期权的价值为 V' 且 $\frac{\partial V'}{\partial \sigma} = v'$. 结果对冲组合被称为是$\mathcal{V}$- 中性 ($\mathcal{V}$-neutral).

随机波动率和隐含波动率

由于不能直接观察到波动率，所以很自然地把它作为随机过程来建立模型. 为了发展所谓的随机波动率模型 (stochastic volatility model)，人们花费了大量的努力. 在这个框架中，在数据中观察到的厚尾部收益率分布能用来建立模型，有时在资产价格中的“跳”可通过波动率中的跳来建立最好的模型. 例如，如果根据具有常数利率的泊松过程有跳发生，且在 τ 时刻的一个跳 $S_\tau/S_{\tau-}$ 服从对数正态分布，那么 S_t 的分布将是对数正态的，但方差参数由一个泊松随机变量的乘积给出 (习题 19). 随机波动率也可用于在隐含波动率曲线中建立“微笑”的模型，因此通过寻找随机波动率模型和隐含波动率模型之间的对应关系来结束本 章. 可再次参见 Davis(2001). 一个典型的随机波

183

动率模型是下面的形式

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}W_t^1,$$

$$\mathrm{d}\sigma_t = a(S_t, \sigma_t)\mathrm{d}t + b(S_t, \sigma_t)\left(\rho \mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_t^2\right),$$

其中 $\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}$，$\{W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的 $\mathbb{P}$ - 布朗运动，ρ 是 $(0,1)$ 中的常数，系数 $a(x,\sigma)$ 和 $b(x,\sigma)$ 满足波动率模型.

与通常一样，我们想求出一个鞅测度. 如果 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价，那么对某些被积函数 $\{\hat{\theta}_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$，它关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数的形式是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t \hat{\theta}_s \mathrm{d}W_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{\theta}_s^2 \mathrm{d}s - \int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s\right).$$

为了使贴现的资产价格 $\{\tilde{S}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{Q}$- 鞅，选取

$$\hat{\theta}_t = \frac{\mu - r}{\sigma_t}.$$

然而当 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 0}$ 不是一个可交易资产时，$\{\theta_t\}_{t\geqslant 0}$ 的选取是任意的，因此无套利论证可用于确定它的漂移. 在 $\mathbb{Q}$ 下，

$$X_t^1 = W_t^1 + \int_0^t \hat{\theta}_s \mathrm{d}s$$

和

$$X_t^2 = W_t^2 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$$

是独立的布朗运动. 因此 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 0}$ 的动力系统可以方便地记为

$$\mathrm{d}S_t = rS_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}X_t^1$$

和

$$\mathrm{d}\sigma_t = \tilde{a}(S_t, \sigma_t)\mathrm{d}t + b(S_t, \sigma_t)\left(\rho \mathrm{d}X_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}X_t^2\right)$$

这里

$$\tilde{a}(S_t, \sigma_t) = a(S_t, \sigma_t) - b(S_t, \sigma_t)\left(\rho\hat{\theta}_t + \sqrt{1-\rho^2}\theta_t\right).$$

现在引入第二个可交易的资产. 假设记为 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 的期权在 T 时刻的执行价值为 $\Phi(S_T)$，定义在 $t<T$ 时刻它的值为在测度 $\mathbb{Q}$ 下 $\Phi(S_T)$ 的贴现值. 即

$$V(t, S_t, \sigma_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

多维 Feynman-Kac 随机表示定理 (结合通常的乘积法则) 告诉我们，函数 $V(t,x,\sigma)$ 满足偏微分方程

184

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x,\sigma)+rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x,\sigma)+\tilde{a}(t,x,\sigma)\frac{\partial V}{\partial \sigma}(t,x,\sigma)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x,\sigma)$$
$$+\frac{1}{2}b(t,x,\sigma)^2\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}(t,x,\sigma)+\rho\sigma x b(t,x,\sigma)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial \sigma}(t,x,\sigma)-rV(t,x,\sigma)=0.$$

记 $Y_t=V(t,S_t,\sigma_t)$ 和在我们的记号中减少 $V,\tilde{a}$ 和 b 对 (t,S_t,σ_t) 的依赖性，伊藤公式的应用告诉我们

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma_t^2S_t^2\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\sigma}\rho b\sigma_tS_t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}b^2\mathrm{d}t\\
&=\left(rV-rS_t\frac{\partial V}{\partial x}-\tilde{a}\frac{\partial V}{\partial \sigma}-\frac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}-\rho\sigma_tS_tb\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\sigma}\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+rS_t\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}t+\sigma_tS_t\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}X_t^1+\tilde{a}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}t+b\rho\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}X_t^1+b\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}X_t^2\\
&\quad+\frac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mathrm{d}t+\rho b\sigma_tS_t\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\sigma}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\mathrm{d}t\\
&=rY_t\mathrm{d}t+\sigma_tS_t\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}X_t^1+b\rho\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}X_t^1+b\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\mathrm{d}X_t^2.
\end{aligned}$$

如果映射 $\sigma\mapsto y=V(t,x,\sigma)$ 是可逆的，使得对某些好的函数 D，$\sigma=D(t,x,y)$，那么对某些函数 c 和 d，

$$\mathrm{d}Y_t=rY_t\mathrm{d}t+c(t,S_t,Y_t)\mathrm{d}X_t^1+\mathrm{d}(t,S_t,Y_t)\mathrm{d}X_t^2.$$

我们现在已经建立了有可交易资产 $\{S_t\}_{t\geqslant0}$ 和 $\{Y_t\}_{t\geqslant0}$ 的完全市场模型，对于这个模型 $\mathbb{Q}$ 是惟一的鞅测度. 当然，对 $\{\theta_t\}_{t\geqslant0}$ 的每一个选择，我们实际上已经建立了这样的市场，并且正是 $\{\theta_t\}_{t\geqslant0}$ 的选择明确确定了函数 c 和 d，正是这些函数告诉我们怎样对冲.

因此隐含波动率的什么模型对应于这个随机波动率模型？如果在方程 (7.12) 中波动率取为 $\hat{\sigma}(t)$，那么隐含波动率 $\hat{\sigma}(t)$ 将使得 Y_t 是在 (t,S_t) 上取值的 Black-Scholes 价格. 在这种方法中，$\{\theta_t\}_{t\geqslant0}$ 的每一个选择或 $\{Y_t\}_{t\geqslant0}$ 的等价模型给出了一个隐含波动率的模型.

关于随机波动率有大量的文献，比较好的文献是 Fouque，Papanicolau 和 Sircar (2000).

习 题

1. 验证在 7.1 节中定义的复制投资组合是自融资的.

2. 假设 $\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下独立的布朗运动，令 ρ 为常数且 $0<\rho<1$. 求系数 $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1,2}$ 使得

$$\tilde{W}_t^1=\alpha_{11}W_t^1+\alpha_{12}W_t^2$$

和

$$\tilde{W}_t^2=\alpha_{21}W_t^1+\alpha_{22}W_t^2$$

在测度 $\mathbb{Q}$ 下定义了两个标准布朗运动，且 $\mathbb{E}\left[\tilde{W}_t^1\tilde{W}_t^2\right]=\rho t$. 解是惟一的吗? 185

3. 假设 $F(t,x)$ 是时非齐次的 Black-Scholes 偏微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t)x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)+r(t)x\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)-r(t)F(t,x)=0, \tag{7.13}$$

的解且满足适合于欧式看涨期权定价的边界条件. 作变换

$$y=x\mathrm{e}^{\alpha(t)},\quad v=F\mathrm{e}^{\beta(t)},\quad \tau=\gamma(t)$$

且选取 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 使在得到的方程中 v 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的系数为零，并且选择 $\gamma(t)$ 去掉剩余时间的依赖性使得方程变为

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,y)=\frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\tau,y).$$

注意到在这个方程中系数与时间无关且与 r 或 σ 无关. 推导通过在经典的 Black-Scholes 公式中作适当的变换可获得方程 (7.13) 的解.

4. 设 $\{W_t^i\}_{t\geqslant 0}, i=1,\cdots,n$, 是独立布朗运动. 证明由

$$R_t=\sqrt{\sum_{i=1}^n (W_t^i)^2}$$

定义的 $\{R_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足随机微分方程. 过程 $\{R_t\}_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动在 $\mathbb{R}^n$ 中的径向部分，且被称为n- 维贝塞尔过程 (n-dimensional Bessel process).

5. 回顾由 $X_t=(W_t^1,W_t^2)$ 定义的二维布朗运动 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，其中 $\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 是独立的 (一维) 标准布朗运动. 求 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的科尔莫戈罗夫倒向方程.

如果 $\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{W_t^2\}_{t\geqslant 0}$ 用相关的布朗运动 $\{\tilde{W}_t^1\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\tilde{W}_t^2\}_{t\geqslant 0}$，且对某些 $-1<\rho<1$ 有 $\mathbb{E}\left[\mathrm{d}\tilde{W}_t^1\mathrm{d}\tilde{W}_t^2\right]=\rho\mathrm{d}t$ 来代替，重新计算上述问题.

6. 利用 Δ- 对冲技巧证明推论 7.2.7 中的结果.

7. 在已选计价单位 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 有非零波动率的情况下，重述 7.2 节中的 Black-Scholes 分析方法，且验证对适当选取的 $\mathbb{Q}$ (应该确定)，在 T 时刻收益为 C_T 的衍生产品的公平价格仍为

$$V_t=B_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

8. 两个交易者在 7.2 节中的同一个完全无套利 Black-Scholes 市场中运作，出售 186 相等的期权，但选取的计价单位不同，它们的对冲策略有何差别?

9. 求复制例 7.2.9 中的双重货币远期合约的投资组合.

10. 一份关于例 7.2.9 中的 BP 股票的**双重货币数字合约** (quanto digital contract) 规定在 T 时刻当 BP 英镑股票价格 S_T 大于 K 时支付 1 美元. 假设 7.2 节中 Black-Scholes 双重货币模型成立，求这样一份期权在零时刻的价格以及复制投资组合.

11. 一份关于例 7.2.9 中的 BP 股票的**双重货币看涨期权** (quanto call option) 在 T 时刻的价值是 $E(S_T-K)_+$美元，其中 S_T 为英镑股票价格. 假设 7.2 节中 Black-Scholes 双重货币模型成立，求该期权在零时刻的价格以及复制投资组合.

12. **亚式期权** (Asian option) 假设市场由一个无风险现金债券 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和一个价格为 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 的单风险资产组成，且满足

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t, \quad B_0 = 1$$

和

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t,$$

其中 $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个 $\mathbb{P}$ - 布朗运动.

一份期权规定在 T 时刻收益为 $C_T = \Phi(S_T, Z_T)$，这里对 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 中某个 (确定的) 实值函数 g，

$$Z_t = \int_0^t g(u, S_u)\mathrm{d}u.$$

根据一般理论可知，这样一份期权在 t 时刻的价值满足

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T, Z_T)|\mathcal{F}_t]$$

其中 $\mathbb{Q}$ 为测度，在该测度下 $\{S_t/B_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅.

证明 $V_t = F(t, S_t, Z_t)$，其中在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中的实值函数 $F(t,x,z)$ 是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + rx\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + g\dfrac{\partial F}{\partial z} - rF = 0, \\ F(T,x,z) = \Phi(x,z). \end{cases}$$

的解. 进一步证明根据在 t 时刻由

$$\phi_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, Z_t)$$

份额的股票和

$$\psi_t = \mathrm{e}^{-rt}\left(F(t,S_t,Z_t) - S_t\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t,Z_t)\right)$$

份额的现金债券组成的自融资投资组合可对冲权益 C_T.

13. 假设 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 为泊松过程且在 $\mathbb{P}$ 下其强度为 $\{\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$. 证明由

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s \mathrm{d}s$$

定义的 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个关于由 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 生成的 σ - 域的 $\mathbb{P}$- 鞅. 187

14. 假设 $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个在 $\mathbb{P}$ 下其强度为 $\{\lambda_t\}_{t\geqslant 0}$ 的泊松过程且 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 为对应的泊松鞅. 验证对一个 $\{\mathcal{F}_t^M\}_{t\geqslant 0}$- 可料过程 $\{f_t\}_{t\geqslant 0}$,

$$\int_0^t f_s \mathrm{d}M_s$$

是一个 $\mathbb{P}$- 鞅.

15. 如果在驱动资产价格的随机微分方程中允许系数是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 适应过程，并假定存在某些确定的边界条件，那么证明 7.3 节中的分析方法仍是有效的.

16. 证明定理 7.3.5 中的过程 $\{L_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个泊松指数鞅和一个布朗指数鞅的乘积，并由此证明它是一个鞅.

17. 证明在经典的 Black-Scholes 模型中，对欧式看涨 (或看跌) 期权，$\mathcal{V}$ 是严格正的. 推导对标准期权能从其价格中推出 Black-Scholes 模型的波动率参数.

18. 假设 $V(t,x)$ 是欧式看涨 (或看跌) 期权在 t 时刻的 Black-Scholes 价格，已知 t 时刻的股票价格为 x. 证明 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \geqslant 0$.

19. 假设根据强度为常数 λ 的泊松过程，资产价格 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足带跳的几何布朗运动. 在每个独立跳的时刻 τ，$S_\tau/S_{\tau-}$ 服从对数正态分布. 证明，对每个固定的 t, S_t 服从方差为 σ^2 的对数正态分布，这里方差 σ^2 由泊松随机变量的倍数给出. 188

参考书目

背景读物:

- *Probability, an Introduction*, Geoffrey Grimmett and Dominic Welsh, Oxford University Press (1986).
- *Options, Futures and Other Derivative Securities* ,John Hull, Prentice-Hall (Second edition 1993).

Grimmett & Welsh 的书中包含了我们需要的概率论知识的所有内容. Hull 的书中内容金融从业人员非常熟悉，书中详细解释了在建立模型之前市场的运行情况.

补充教材:

- *Arbitrage Theory in Continuous Time,* Tomas Björk ,Oxford University Press(1998).
- *Dynamic Asset Pricing Theory,* Darrell Duffie, Princeton University Press(1992).
- *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance,* Damien Lamberton and Bernard Lapeyre, translated by Nicolas Rabeau and François Mantion, Chapman and Hall(1996).
- *The Mathematics of Financial Derivatives,* Paul Wilmott, Sam Howison and Jeff Dewynne, Cambridge University Press(1995).

这些都是非常有用的补充读物. 前面 3 本书提供了各种方法技巧，而 Wilmott, Howison & Dewynne 的书中专门讨论了偏微分方程方法.

金融数学的进一步主题:

- *Financial Calculus: an Introduction to Derivatives Pricing,* Martin Baxter and Andrew Rennie, Cambridge University Press(1996).
- *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility,* Jean-Pierre Fouque, George Papanicolau and Ronnie Sircar, Cambridge University Press(2000).
- *Continuous Time Finance,* Robert Merton, Blackwell(1990).

- *Martingale Methods in Financial Modelling,* Marek Musiela and Marek Rutkowski, Springer Verlag(1998).

尽管以上读物是为金融从业人员编写而不是作为大学教材使用的，但 Baxter & Rennie 书中的第 5 章为研究利率提供了一个良好的开端. Fouque, Papanicolau & Sircar 的书是一本非常通俗易懂的教材，它为金融数学的后继课程中要讨论的一些特别主题打下了很好的基础. Merton 的书综合了作者获得诺贝尔奖的著名研究工作的内容. Musiela & Rutkowski 的书提供了一个百科全书式的参考读物.

布朗运动，鞅和随机分析:

- *Introduction to Stochastic Integration,* Kai Lai Chung and Ruth Williams, Birkhäuser(Second edition 1990).
- *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes,* Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe, North- Holland(Second edition 1989).
- *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* Ioannis Karatzas and Steven Shreve, Springer-Verlag(Second edition 1991).
- *Probability with Martingales,* David Williams, Cambridge University Press(1991).

Williams 的书系统介绍了离散参数鞅和更多的概念 (积分法，条件期望，测度等等). 其他的书都是研究连续模型. Chung &Williams 的书简短易读，但包括了所需要的内容.

一本更有用的参考书是：*Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae,* Andrei Borodin and Paavo Salminen, Birkhäuser(1996).

补充参考文献:

- Louis Bachelier, La théorie de la speculation. *Ann Sci Ecole Norm Sup* 17 (1900), 21-86. English translation in *The Random Character of Sto-ck Prices,* Paul Cootner(ed), MIT Press(1964), reprinted Risk Books(2000).
- J Cox, S Ross and M Rubinstein, Option pricing, a simplified approach. *J Financial Econ* 7(1979), 229-63.
- M Davis, Mathematics of financial markets, in *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond,* Bjorn Engquist and Wilfried Schmid (eds), Springer-Verlag(2001).

- D Freedman, *Brownian Motion and Diffusion,* Holden-Day(1971).
- J M Harrison and D M Kreps, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J Econ Theory* 20(1979), 381-408.
- J M Harrison and S R Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stoch Proc Appl* 11(1981), 215-60.
- F B Knight, *Essentials of Brownian Motion and Diffusion,* Mathematical Surveys, volume 18, American Mathematical Society(1981).
- T J Lyons, Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives. *Appl Math Finance* 2(1995), 117-33.
- P Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations,* Springer-Verlag(1990).
- D Revuz and M Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion,* Springer-Verlag(Third edition 1998).
- P A Samuelson, Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review* 6, (1965), 41-50.

记　号

金融术语和 Black-Scholes 模型

T，到期时间.

C_T，T 时刻的权益价值.

$\{S_n\}_{n\geqslant 0}$，$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 原生股票价值.

K，标准期权的敲定价格.

$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K0)$.

r，连续复利利率.

σ，波动率.

$\mathbb{P}$，概率测度，通常称为市场测度.

$\mathbb{Q}$，等价于市场测度的鞅测度.

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$，$\mathbb{Q}$ 的期望值.

$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$，$\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikopdym 导数.

$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，原生股票的贴现值. 一般地，对过程 $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$，$\tilde{Y}_t = Y_t/B_t$，其中 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 表示 t 时刻的无风险现金债券的价值.

$V(tx)$，当股票价格 $S_t = x$ 时，投资组合在 t 时刻的值，即期权 Black-Scholes 的价格.

一般概率

$(\Omega\mathcal{F}\mathbb{P})$ ，概率空间.

$\mathbb{P}[A|B]$，A 关于 B 的条件概率.

Φ，标准正态分布函数.

$p(txy)$，布朗运动的转移密度.

$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$，随机变量 X 和 Y 具有相同的分布.

$Z \sim N(01)$，随机变量 Z 服从标准正态分布.

$\mathbb{E}[X;A]$，见定义 2.3.4.

鞅和其他随机过程

$\{M_t\}_{t\geqslant 0}$，在某些规定概率测度下的鞅.

$\{[M]_t\}_{t\geqslant 0}$，$\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 的二次变差.

$\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ ，σ - 域流.

$\{\mathcal{F}_n^X\}_{n\geqslant 0}$ ($\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geqslant 0}$)，由过程 $\{X_n\}_{n\geqslant 0}(\{X_t\}_{t\geqslant 0})$ 生成的 σ - 域流.

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$，$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n]$，条件期望；见 30~40 页.

$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$，在规定测度下的布朗运动（一般是市场测度）.

$X^*(t)$，$X_*(t)$ 对应于 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的最大值和最小值过程.

杂类

$\triangleq$，定义为.

$\delta(\pi)$，划分 π 的网格.

$f|_x$，函数 f 在 x 处的值.

θ^t (θ 为向量或矩阵)，θ 的转置.

$x > 0 x \gg 0$，向量 $x \in \mathbb{R}^n$，见第 10 页.

索　引

索引页码为英文原书页码，与页边标注的页码一致.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝金融数学教程
作者＝（英）埃瑟里奇著
页数＝１９４
ＳＳ号＝１１６８２６５８
出版日期＝２００６年8月